Topología

Segundo cuatrimestre - 2014

Práctica 8

Teorema de van Kampen y clasificación de revestimientos

---

1. Sea $X = U \cup V$ con U, V abiertos arcoconexos tales que $U \cap V$ es no vacío y arcoconexo, y sea $\psi : U \to X$ la inclusión.

   a) Probar que si V es simplemente conexo, entonces $\psi_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un epimorfismo.

   b) Probar que si V y $U \cap V$ son simplemente conexos, entonces $\psi_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un isomorfismo.

2. Sea x un punto de $\mathbb{R}^2$ y sea $X_n \subset \mathbb{R}^2$ la unión de n circunferencias $C_1, ..., C_n$ tales que $C_i \cap C_j = \{x\}$ para todo i, j. Probar que $\pi_1(X_n, x)$ es el grupo libre con n generadores.

3. Sea $Y_n \subset \mathbb{R}^2$ el siguiente conjunto:

$$Y_n = \{p \in \mathbb{R}^2 : \exists j \in \{1, ..., n\} / |p - (j - 1/2, 0)| = 1/2\}$$

   Calcular $\pi_1(Y_n, 0)$.

4. Probar que la esfera n-dimensional S^n es simplemente conexa para $n \geq 2$. Concluir que el grupo fundamental del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es el grupo cíclico de orden 2 para $n \geq 2$.

5. Calcular los grupos fundamentales de los siguientes espacios.

   a) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.

   b) $P^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo sin un punto.

   c) $S^n \vee S^n$, la unión por un punto de dos copias de S^n.

   d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

   e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

   f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

   g) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

6. Sea $K = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(x = x' \text{ e } y = y') \text{ ó } (\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ y } y + y' = 1)$$

   El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcular (una presentación d)el grupo fundamental de X.

7. Una función se dice *homotópicamente nula* o *null-homotópica* si es homotópica a una función constante.

   a) Probar que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es homotópicamente nula.

   b) Probar que toda función continua $P^2 \to S^1$ es homotópicamente nula.

   c) Exhibir una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea homotópicamente nula.

8. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Considerando el isomorfismo $\pi_1(T, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones, describir los revestimientos de T asociados a los subgrupos

   a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

9. *a*) Probar que todo isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $T \to T$ que deja quieto a x_0.

   b) Probar que si E es un revestimiento conexo de T, entonces E es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ ó T.

   Sugerencia: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base $\{a_1, a_2\}$ de F tal que $\{na_1\}$ es base de N para algún n o bien $\{na_1, ma_2\}$ es base de N para ciertos n, m.

10. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p : \tilde{G} \to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Probar que la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ y la función $\nu : G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ y $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ que hacen de $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Probar además que p es un morfismo.

11. Probar que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

12. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = rq$.

    a) Probar que si p y r son revestimientos, también lo es q.

    b) Probar que si p y q son revestimientos, también lo es r.

    c) Probar que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

13. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$.

    a) Sean $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Probar que existe una transformación deck h tal que $h(e_0) = e_1$ si y sólo si $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Probar que si h existe, entonces es única.

b) Si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es normal en $\pi_1(B, b_0)$, entonces $p : E \to B$ se dice un *revestimiento regular*. Probar que en ese caso, el grupo de transformaciones deck de E es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.

c) Concluir que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

14. Describir el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.