Práctica 2

Espacios producto

1. Independencia de variables aleatorias

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$ y $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Probar que
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C_1 \times C_2 : C_1, C_2 \in \mathcal{C}).$$

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variables aleatorias. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) Las variables aleatorias X e Y son independientes.
   b) $F_{XY} = F_X F_Y$.
   c) $P_{XY} = P_X \times P_Y$
   d) En el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{XY})$ las proyecciones canónicas son variables aleatorias independientes.

3. *a*) Mostrar que si X e Y son variables aleatorias discretas entonces
$$X \text{ e } Y \text{ son independientes } \iff p_{XY} = p_X p_Y.$$
   b) Mostrar que si X e Y son variables aleatorias absolutamente continuas entonces
$$X \text{ e } Y \text{ son independientes } \iff f_{XY} = f_X f_Y.$$

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad.

- Dada una colección finita $(\mathcal{F}_i)_{i=1,\dots,n}$ de σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$, decimos que son independientes si
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$
para toda elección de $A_i \in \mathcal{F}_i$ con $1 \leq i \leq n$.

- Dada una familia arbitraria $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ de σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$, decimos que son independientes si cualquier subfamilia finita lo es.

4. Verificar que X e Y son independientes si y sólo si $\sigma(X)$ y $\sigma(Y)$ lo son.

5. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ π-sistemas contenidos en $\mathcal{F}$. Probar que $\sigma(\mathcal{P}_1)$ y $\sigma(\mathcal{P}_2)$ son independientes si y sólo si
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$
para todo $A_1 \in \mathcal{P}_1$ y $A_2 \in \mathcal{P}_2$.

6. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ σ-álgebras independientes. Probar que si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ e $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, P)$ entonces
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

2. La σ-álgebra producto

1. Sean Ω_1 un conjunto, $(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios medibles y $X_\alpha : \Omega_1 \to \Omega_\alpha$ una función para cada $\alpha \in \Gamma$. Sea $\mathcal{G} = \sigma\big(X_\alpha : \alpha \in \Gamma\big)$ la menor σ-álgebra sobre Ω_1 para la cual las funciones X_α resultan medibles. Por último, sean además $(\Omega, \mathcal{F})$ otro espacio medible y una función $Y : \Omega \to \Omega_1$.

   a) Probar que Y es $\mathcal{G}$-medible si y sólo si $X_\alpha \circ Y$ es $\mathcal{F}_\alpha$-medible para todo $\alpha \in \Gamma$.

   b) Demuestre que $\mathcal{G}$ es la única σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega_1)$ que verifica dicha propiedad.[1]

Definición. Sea $(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios medibles y consideremos su producto

$$\Omega_1 := \prod_{\alpha\in\Gamma} \Omega_\alpha.$$

Definimos la *σ-álgebra producto* $\bigotimes_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{F}_\alpha$ sobre Ω_1 como la σ-álgebra inicial generada por las proyecciones $\pi_\alpha : \Omega_1 \to \Omega_\alpha$ dadas por la fórmula

$$\pi_\alpha((x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}) = x_\alpha.$$

Cuando quede claro quiénes son las σ-álgebras $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, utilizaremos la notación $\sigma_\Pi(\Omega_1)$ para referirnos a la σ-álgebra producto $\bigotimes_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{F}_\alpha$.

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase de los *cilindros finito-dimensionales* en $\prod_{\alpha\in\Gamma} \Omega_\alpha$ definida como

$$\mathcal{C} = \left\{ C(J, B) : J = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma^k, B \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{\alpha_i} \right\}$$

   donde $C(J, B)$ es el cilindro n-dimensional dado por

$$C(J, B) := \left\{ (\omega_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \prod_{\alpha\in\Gamma} \Omega_\alpha : (\omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_n}) \in B \right\}.$$

   Probar que $\mathcal{C}$ es un álgebra de conjuntos. Deducir que $\sigma_\Pi(\mathbb{R}^\Gamma) = \sigma(\mathcal{C})$.

3. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de funciones reales definidas sobre un cierto espacio $(\Omega, \mathcal{F})$. Probar que la aplicación $X : \Omega \to \mathbb{R}^\Gamma$ definida por la fórmula

$$X(\omega) := (X_\alpha(\omega))_{\alpha\in\Gamma}$$

   es $\sigma_\Pi(\mathbb{R}^\Gamma)$-medible si y sólo si X_α es una variable aleatoria para todo $\alpha \in \Gamma$.[2]

4. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de variables aleatorias definidas sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F})$. Verificar que

$$\sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma) = \{X^{-1}(B) : B \in \sigma_\Pi(\mathbb{R}^\Gamma)\}$$

   donde X es el vector aleatorio definido en el ejercicio anterior.

5. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de variables aleatorias definidas sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F})$. Probar que una variable aleatoria $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma)$-medible si y sólo si existe $\varphi : \mathbb{R}^\Gamma \to \mathbb{R}$ función $\sigma_\Pi(\mathbb{R}^\Gamma)$-medible tal que $Y = \varphi((X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma})$.[3]

[1] Por este motivo $\mathcal{G}$ se dice la *σ-álgebra inicial sobre Ω_1 generada por la familia $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$*.

[2] Es decir, X es un vector aleatorio si y sólo si cada una de sus coordenadas es una variable aleatoria.

[3] Es decir, Y es $\sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma)$-medible si y sólo si es función medible del vector aleatorio $X = (X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$.

3. La σ-álgebra de Borel

Definición. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ definimos su σ-álgebra de Borel como

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}_X).$$

1. Mostrar que si la topología $\mathcal{T}_X$ admite una base numerable entonces

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{U})$$

para cualquier base $\mathcal{U}$ de $\mathcal{T}_X$, ya sea ésta numerable o no.[4]

2. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de funciones reales definidas sobre un cierto espacio $(\Omega, \mathcal{F})$.

   a) Probar que si $B \in \sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma)$ y $\omega \in B$ entonces para todo $\omega' \in \Omega$ vale que

$$X_\alpha(\omega) = X_\alpha(\omega') \text{ para todo } \alpha \in \Gamma \implies \omega' \in B.$$

   b) Mostrar que

$$\sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma) = \bigcup_{J\subseteq\Gamma \text{ numerable}} \sigma(X_\alpha : \alpha \in J).$$

3. Probar que $\sigma_\Pi(\mathbb{R}^\Gamma) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Gamma)$ y que la igualdad vale si y sólo si Γ es numerable.

4. Mostrar que si Γ es numerable entonces para cualquier base de abiertos $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^\Gamma$ valen las igualdades

$$\sigma_\Pi(\mathbb{R}^\Gamma) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Gamma) = \sigma(\mathcal{U}).$$

5. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de variables aleatorias definidas sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F})$. Demostrar que si Γ es no numerable entonces $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma)$-medible si y sólo si existe una *sucesión* $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ y $\varphi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ función $\sigma_\Pi(\mathbb{R}^\mathbb{N})$-medible tal que $Y = \varphi((X_{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}})$.[5] Relacionar con el Ejercicio 5 de la Sección 2.

4. Extensión de Kolmogorov en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$

Definición. Dada una medida de probabilidad P sobre $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \sigma_\Pi(\mathbb{R}^\mathbb{N}))$, definimos su familia de *distribuciones finito-dimensionales* como la familia $(P^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}$ es la medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^n, \sigma_\Pi(\mathbb{R}^n))$ dada para cada $B \in \sigma_\Pi(\mathbb{R}^n)$ por

$$P^{(n)}(B) = P(B \times \mathbb{R}^\mathbb{N}).$$

1. Probar que si dos medidas sobre $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \sigma_\Pi(\mathbb{R}^\mathbb{N}))$ comparten las mismas distribuciones finito-dimensionales entonces son iguales.

2. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de medidas de probabilidad definidas en el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Utilizando el Teorema de extensión de Kolmogorov, construir una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias independientes tal que $P_{X_n} = P_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

[4] Este resultado puede no valer si $\mathcal{T}_X$ no admite una base numerable. En efecto, el Ejercicio 3.3 muestra un ejemplo de espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ en donde existe una base $\mathcal{U}$ para $\mathcal{T}_X$ que satisface $\mathcal{B}(X) \neq \sigma(\mathcal{U})$.

[5] Es decir, Y es $\sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma)$-medible si y sólo si es función medible de apenas *numerables* X_α.

5. Construcción de medidas en $\mathbb{R}^N$

El propósito de esta sección es mostrar que se puede obtener el resultado del Ejercicio 4.2 sin necesidad de apelar al Teorema de extensión de Kolmogorov.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función n-ésima de Rademacher $R_n : [0,1) \to \{0,1\}$ por la fórmula

$$R_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ con } k \text{ par} \\ \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ con } k \text{ impar.} \end{cases}$$

   a) Mostrar que para cada $x \in [0,1)$ se tiene $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{R_n(x)}{2^n}$.[6]

   b) Probar que las funciones de Rademacher $(\mathbb{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituyen una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$ en el espacio de probabilidad $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \mathcal{L}|_{\mathcal{B}([0,1))})$.

2. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. Probar que

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$$

   es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$.
   Sugerencia. Considerar el operador $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$ definido por la fórmula

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(2x-1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   y mostrar que la restricción de F_X al intervalo $[0,1]$ es continua y punto fijo de Φ.

3. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de medidas de probabilidad definidas en el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Construir sobre el espacio de probabilidad $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \mathcal{L}|_{\mathcal{B}([0,1))})$ una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias independientes tal que $P_{X_n} = P_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   Sugerencia. Empezar por el caso $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con distribución uniforme en $[0,1]$, con la ayuda de los Ejercicios 5.1 y 5.2.

4. **Bonus extra.** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$.

   a) Probar que $X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2X_n}{3^n}$ tiene como función de distribución acumulada a la función de Cantor-Lebesgue (extendida).
   Sugerencia. Considerar un operador Φ similar al del Ejercicio 5.2.

   b) Convencerse a partir del ítem *a*) y del Ejercicio 5.2. de que X tiene distribución uniforme en el conjunto de Cantor.[7]

[6] Es decir, para cada $x \in [0,1)$ la sucesión $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es el desarrollo de x en base 2. Observar que, en los casos en que x admite dos desarrollos en base 2, el desarrollo dado por $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es el finito, i.e. el que tiene cola de 0's.

[7] De hecho, es posible formalizar esta afirmación. En efecto, si denotamos por C al conjunto de Cantor, se puede demostrar que $P_X \ll \mathcal{H}^q$, donde $q = \frac{\log 2}{\log 3}$ es la dimensión de Hausdorff de C y $\mathcal{H}^q$ denota a la medida de Hausdorff q-dimensional, y que su densidad viene dada por $\frac{dP_X}{d\mathcal{H}^q}(x) = \frac{\mathbb{1}_C(x)}{\mathcal{H}^q(C)}$.

6. Ley 0-1 de Kolmogorov

1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen las σ-álgebras

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_i : 1 \leq i \leq n) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}_n = \sigma(X_i : i > n).$$

Sean además las σ-álgebras $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_i : i \in \mathbb{N})$ y $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$.

a) Probar que todo evento $A \in \mathcal{G}_\infty$ es independiente de $\mathcal{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Deducir que todo evento $A \in \mathcal{G}_\infty$ es independiente de $\mathcal{F}_\infty$.

c) Concluir que para todo evento $A \in \mathcal{G}_\infty$ se tiene $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$.

Este resultado se conoce como *Ley* 0-1 *de Kolmogorov*.