Práctica 3

Esperanza condicional

1. Generalidades

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ dos σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$. Probar que si X es una variable aleatoria integrable sobre este espacio entonces

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) \;\; \mathcal{G}_1\text{-medible} \Longrightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1).$$

2. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dos variables aleatorias absolutamente integrables. Sea $\mathcal{C}$ la clase de conjuntos dada por

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \mathcal{F} : \int_A X \, dP = \int_A Y \, dP \right\}.$$

   a) Probar que $\mathcal{C}$ es una clase monótona.

   b) Probar que $\mathcal{C}$ es un λ-sistema si y sólo si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

   c) Dada una σ-álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, deducir que Y es una versión de $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ si y sólo si sucede alguna de las siguientes posibilidades:

   - $\mathcal{C}$ contiene un álgebra $\mathcal{A}$ tal que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}$,
   - $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ y $\mathcal{C}$ contiene un π-sistema $\mathcal{P}$ tal que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{G}$.

3. Sean μ y ν dos medidas de probabilidad sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que $\mu \ll \nu$. Sean además $(\Delta, \mathcal{G})$ otro espacio medible y $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Delta, \mathcal{G})$ medible.

   a) Probar que $\mu_X \ll \nu_X$.

   b) Probar que $\mathbb{E}_\nu(\frac{d\mu}{d\nu}|X) = \frac{d\mu_X}{d\nu_X}(X)$.

4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dos variables aleatorias absolutamente integrables tales que

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y \qquad \text{y} \qquad \mathbb{E}(Y|X) = X.$$

   ¿Es cierto que $P(X = Y) = 1$?

   Sugerencia. Considere primero el caso $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para formar su opinión. Ahora, para responder el caso general, tener en cuenta las descomposiciones del tipo

$$\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}((X - Y)\mathbb{1}_{\{X > c, Y \leq c\}}) + \mathbb{E}((X - Y)\mathbb{1}_{\{X \leq c, Y \leq c\}}).$$

5. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$ y X una variable aleatoria no negativa definida sobre este espacio.

   a) Probar que $\{X > 0\}$ está contenido en $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ salvo probabilidad nula, i.e. $P(X > 0\,,\, \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq 0) = 0$.

b) Mostrar que $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ es, salvo probabilidad nula, el evento $\mathcal{G}$-medible más pequeño que contiene al evento $\{X > 0\}$ salvo probabilidad nula, i.e. para todo G evento $\mathcal{G}$-medible se tiene

$$P(X > 0\,,\, G^c) = 0 \Longrightarrow P(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\,,\, G^c) = 0.$$

c) Deducir que si $a < X < b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $P(a < \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) < b) = 1$. ¿Es cierta la recíproca?

2. Cálculo de esperanzas condicionales

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$ tal que $P(B) \in \{0, 1\}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

   a) Caracterizar las variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles.

   b) Calcular $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria X integrable.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de Ω. Consideremos la σ-álgebra generada por la partición $\mathcal{G} = \sigma(A_n : n \in \mathbb{N})$.

   a) Caracterizar los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{G}$.

   b) Caracterizar las variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles.

   c) Calcular $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria X integrable.

   d) Concluir que la expresión encontrada en el ítem anterior caracteriza $\mathbb{E}(X|Y)$ para toda Y variable aleatoria discreta. Observar que, en este caso, $\mathbb{E}(X|Y)$ también resulta una variable aleatoria discreta.

3. **Principio de sustitución I**. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra y $X : \Omega \to (\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ e $Y : \Omega \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos elementos aleatorios definidos sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que Y es $\mathcal{G}$-medible y además X es independiente de $\mathcal{G}$. Probar que para toda f función medible Borel no negativa se tiene

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \int_{\Omega_1} f(x, Y)\, dP_X(x).^1$$

4. **¿Es la esperanza condicional una propiedad distribucional?**

   Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. ¿Es cierto que si dos variables aleatorias X e Y definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ tienen la misma distribución entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ y $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ tienen también la misma distribución?

[1] Notar que, en el caso $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, esto justifica el razonamiento intuitivo

$$\text{“ } \mathbb{E}(f(X, Y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)) \text{ ”}$$

si X e Y son independientes.

5. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y dos variables aleatorias discretas definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ con función de probabilidad puntual conjunta p_{XY}. Supongamos además que X es integrable. Sea $\Phi : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la función definida por

$$\Phi(y) = \sum_{x \in \mathcal{A}_X} x \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

Probar que $\Phi(Y)$ definida por la fórmula

$$\Phi(Y) = \begin{cases} \Phi(y) & \text{si } Y = y \text{ con } y \in \mathcal{A}_Y \\ \\ 0 & \text{si } Y = y \text{ con } y \notin \mathcal{A}_Y. \end{cases}$$

es una versión de $\mathbb{E}(X|Y)$.[2]

6. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y dos variables aleatorias continuas definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ con función de densidad conjunta f_{XY} medible Borel.[3] Supongamos además que X es integrable. Sea $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la función definida por

$$\Phi(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\, dx & \text{si } f_Y(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y) dx > 0 \\ \\ 0 & \text{si } f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Probar que $\Phi(Y)$ es una versión de $\mathbb{E}(X|Y)$.

7. Una familia $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice *intercambiable* si para cada $n \in \mathbb{N}$ y $J = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma^n$ la distribución del vector aleatorio $X = (X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n})$ coincide con la de $X_\sigma = (X_{\alpha_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{\alpha_{\sigma(n)}})$ para cualquier permutación de índices σ.

   a) Probar que si X es una variable aleatoria simétrica respecto del origen entonces el vector $(X, -X)$ es intercambiable.

   b) Probar que toda familia de variables aleatorias i.i.d. es intercambiable.

   c) Probar que si el vector $X = (X_1, \ldots, X_n)$ es intercambiable y X_1 es integrable entonces para todo $1 \leq i \leq n$ vale

$$\mathbb{E}\Big(X_1 \Big| \sum_{i=1}^n X_i\Big) = \mathbb{E}\Big(X_i \Big| \sum_{i=1}^n X_i\Big).$$

   Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{i=1}^n X_i)$. Interpretar.

[2] Tener en cuenta que parte del ejercicio consiste en mostrar que $\Phi(Y)$ así definida es $\sigma(Y)$-medible. Lo mismo vale también para el Ejercicio 6.

[3] Observar que todo vector aleatorio absolutamente continuo admite función de densidad medible Borel.

3. Independencia condicional

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Dos variables aleatorias X e Y definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se dicen *independientes dada* $\mathcal{G}$ si para todo par de funciones medibles Borel no negativas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

1. ¿Cuándo son dos variables aleatorias X e Y independientes dada la σ-álgebra trivial? ¿Y dada $\mathcal{F}$?

2. *a*) Mostrar que X e Y son independientes dada una cierta σ-álgebra $\mathcal{G}$ si y sólo si para cualquier par $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de funciones medibles Borel no negativas y toda variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible Z no negativa se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})).$$

   b) Mostrar que X e Y son independientes dada una cierta σ-álgebra $\mathcal{G}$ si y sólo si para toda función medible Borel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa vale que

$$\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

   ¿Qué nos dice esto para el caso en que $\mathcal{G}$ es la σ-álgebra trivial?

4. Aplicaciones

1. Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas y N otra variable aleatoria tomando valores en $\mathbb{N}$ e independiente de la sucesión $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Probar que si X_1 es integrable y $\mathbb{E}(N) < +\infty$ entonces

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

   es una variable aleatoria integrable y calcular su esperanza.

2. *a*) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parámetro p. Probar que $X := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$ tiene distribución $\mathcal{G}(p)$.

   b) Sea $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Calcular $\mathbb{E}(Y)$ usando técnicas de esperanza condicional.

3. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Calcular la esperanza de la variable aleatoria $N := \inf\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} U_i \geq 1\}$.

4. A una fiesta concurren N personas, cada una con un sombrero. Al ingresar a la fiesta cada persona deja su sombrero en una caja grande situada en la entrada del salón. Cuando finaliza el evento, las N personas se dirigen a la entrada del salón y extraen un sombrero al azar de la caja. Aquellas personas que sacan su propio sombrero se retiran de la fiesta. El resto vuelve a colocar los sombreros que extrajeron en la caja y luego cada uno de los todavía presentes extrae nuevamente un sombrero al azar. Este procedimiento se repite hasta que las N personas se hayan retirado de la fiesta. Calcular la esperanza de R_N, la cantidad de extracciones que fueron necesarias hasta conseguir que las N personas se retiraran de la fiesta con su sombrero.

5. Esperanza condicional regular

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$, Q una probabilidad condicional regular para $\mathcal{F}$ dada $\mathcal{G}$ y X una variable aleatoria integrable definida en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$. Probar que la aplicación

$$\omega \mapsto \int_\Omega X(\omega')Q(\omega, d\omega')$$

es una versión de $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

2. **Principio de sustitución II**. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y dos variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$.

   a) Mostrar que en el espacio Ω existe una única probabilidad condicional regular para la σ-álgebra $\sigma(X, Y)$ dada la variable aleatoria Y.

   b) Probar que, si Q es una probabilidad condicional regular para $\sigma(X, Y)$ dada Y, para toda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible Borel no negativa se tiene que la aplicación

$$\omega \mapsto \int_\Omega f(X(\omega'), Y(\omega))Q(Y(\omega), d\omega')$$

   es una versión de $\mathbb{E}(f(X, Y)|Y)$.[4]

3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y dos variables aleatorias discretas definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ con función de probabilidad puntual conjunta p_{XY}. Fijada una medida de probabilidad P_0 sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, demostrar que la aplicación $Q : \mathbb{R} \times \sigma(X, Y) \to [0, 1]$ definida para cada $B \in \sigma_\Pi(\mathbb{R}^2)$ por la fórmula

$$Q(y, \{(X, Y) \in B\}) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{x \in \mathcal{A}_X : (x,y) \in B} p_{XY}(x, y)}{\sum_{x \in \mathcal{A}_X} p_{XY}(x, y)} & \text{si } y \in \mathcal{A}_Y \\ \\ P_0((X, Y) \in B) & \text{si } y \notin \mathcal{A}_Y \end{cases}$$

es una probabilidad condicional regular para $\sigma(X, Y)$ dada Y.

4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y dos variables aleatorias continuas definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ con función de densidad conjunta f_{XY} medible Borel. Fijada una medida de probabilidad P_0 sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, demostrar que la aplicación $Q : \mathbb{R} \times \sigma(X, Y) \to [0, 1]$ definida para cada $B \in \sigma_\Pi(\mathbb{R}^2)$ por la fórmula

$$Q(y, \{(X, Y) \in B\}) = \begin{cases} \dfrac{\int_\mathbb{R} \mathbb{1}_B(x, y) f_{XY}(x, y)dx}{\int_\mathbb{R} f_{XY}(x, y)dx} & \text{si } \displaystyle\int_\mathbb{R} f_{XY}(x, y)dy > 0 \\ \\ P_0((X, Y) \in B) & \text{si } \displaystyle\int_\mathbb{R} f_{XY}(x, y)dy = 0 \end{cases}$$

es una probabilidad condicional regular para $\sigma(X, Y)$ dada Y.

[4] Notar que esto justifica el razonamiento intuitivo

$$\text{“ } \mathbb{E}(f(X, Y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)|Y = y) \text{ ”}$$

para variables aleatorias X e Y cualesquiera.

5. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible Borel no negativa, deducir de los ejercicios anteriores una expresión explícita para $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y)$ en los siguientes casos:

   i. (X,Y) vector aleatorio discreto.

   ii. (X,Y) vector aleatorio absolutamente continuo.

6. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y (X,Y) un vector aleatorio definido allí. Dada una probabilidad condicional regular Q para la σ-álgebra $\sigma(X,Y)$ dada X, definimos $F^{-1}_{Y|X} : \mathbb{R} \times (0,1) \to [0,1]$ por la fórmula

$$F^{-1}_{Y|X}(x,y) = F^{-1}_x(y)$$

   donde F^{-1}_x es la inversa generalizada de F_x, la función de distribución acumulada asociada a la medida de probabilidad $Q(x,\cdot)$.

   a) Probar que $F^{-1}_{Y|X}$ es medible Borel.

   b) Probar que, si (U_1, U_2) es un vector aleatorio de coordenadas independientes con distribución $\mathcal{U}((0,1))$, entonces el vector aleatorio $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ dado por

$$\tilde{X} = F^{-1}_X(U_1) \qquad \text{y} \qquad \tilde{Y} = F^{-1}_{Y|X}(\tilde{X}, U_2)$$

   tiene la misma distribución que (X,Y).

7. Sea $(P^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una familia consistente de distribuciones finito-dimensionales en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Construir en el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}|_{[0,1]})$ una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias tal que $P_{X_1 \dots X_n} = P^{(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.