Apéndice IV

Esperanza condicional

1. Propiedades de la esperanza condicional

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria.

- Decimos que X es *P-integrable* si

$$\text{mín}\left\{\int X^+ dP, \int X^- dP\right\} < +\infty,$$

donde $X^+ := \text{máx}\{X, 0\}$ y $X^- := (-X)^+$ son las partes positiva y negativa de X. Si X es P-integrable entonces definimos su integral respecto de P como

$$\int X dP := \int X^+ dP - \int X^- dP.$$

Notar que la integral de X está bien definida.[1]

- Decimos que X es *P-absolutamente integrable* si

$$\text{máx}\left\{\int X^+ dP, \int X^- dP\right\} < +\infty.^2$$

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y dos variables aleatorias integrables definidas en este espacio y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra. Probar las siguientes propiedades:

   a) *Linealidad*: Si X e Y son absolutamente integrables entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$ la variable aleatoria $aX + bY$ es absolutamente integrable y además vale

   $$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

   b) *Propiedad fundamental de la esperanza condicional*: $\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big] = \mathbb{E}(X)$.

   c) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ si X es $\mathcal{G}$-medible.

   d) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ si $\sigma(X)$ es independiente de $\mathcal{G}$.

   e) $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})Z)$ para toda Z variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible y acotada.

   f) $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ si X es $\mathcal{G}$-medible y XY es integrable.

   g) *Propiedad de torres*: Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}$ son dos σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$ entonces

   $$\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X|\mathcal{M})\Big|\mathcal{G}\Big] = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$$

[1] Notar que la noción de integrabilidad que damos aquí es más débil que la usual. Optamos por ésta ya que es la mínima condición que se necesita para poder definir la integral de X en la manera tradicional. En particular, observemos que toda variable aleatoria no negativa es integrable con esta nueva definición.

[2] Notar que la noción de absoluta integrabilidad que damos aquí coincide con la usual de integrabilidad.

h) Si $X \leq Y$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.

i) *Convergencia Monótona*: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas tal que $X_n \nearrow X$ entonces $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

j) *Lema de Fatou*: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas entonces $\mathbb{E}(\liminf_{n\to+\infty} X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$.

k) *Convergencia Mayorada*: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias con $\lim_{n\to+\infty} X_n = X$ y $|X_n| \leq Y$ para cierta Y absolutamente integrable entonces $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ en casi todo punto y en L^1.

l) *Desigualdad de Jensen*: Si X es absolutamente integrable y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa tal que $\phi(X)$ es integrable entonces $\phi\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G})$. En particular, si X es absolutamente integrable entonces $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$.

m) *Continuidad en L^p*: Si $1 \leq p \leq +\infty$ y $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces

$$\|E(X|\mathcal{G})\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^p}.$$

En particular, el operador $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es continuo.

2. Probabilidad condicional regular

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Una función $Q : \Omega \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ se dice una *probabilidad condicional regular para $\mathcal{F}$ dada $\mathcal{G}$* si satisface las siguientes condiciones:

i. Para todo $\omega \in \Omega$ la aplicación $Q(\omega, \cdot)$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

ii. Para todo $B \in \mathcal{F}$ la función $Q(\cdot, B)$ es una versión de $P(B|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$, i.e. $Q(\cdot, B)$ es $\mathcal{G}$-medible y además satisface

$$\int_A Q(\omega, B)dP(\omega) = P(A \cap B)$$

para todo $A \in \mathcal{G}$.

Decimos que la probabilidad condicional regular es *única* si para cualquier par de funciones Q y Q' satisfaciendo las condiciones de arriba existe $N \in \mathcal{G}$ con $P(N) = 0$ tal que

$$Q(\omega, B) = Q'(\omega, B)$$

para todo $B \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega - N$.

Teorema. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio métrico completo y separable con su σ-álgebra de Borel. Sean además P una probabilidad en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Entonces existe una única probabilidad condicional regular para $\mathcal{F}$ dada $\mathcal{G}$.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Decimos que la σ-álgebra $\mathcal{F}$ es *determinada numerablemente* si existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ numerable tal que si dos medidas de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ coinciden en $\mathcal{C}$ entonces deben ser iguales.

Teorema. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio métrico completo y separable con su σ-álgebra de Borel. Sean además P una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$ y Q una probabilidad condicional regular para $\mathcal{F}$ dada $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es una σ-álgebra determinada numerablemente entonces existe $N \in \mathcal{G}$ con $P(N) = 0$ tal que

$$Q(\omega, B) = \mathbb{1}_B(\omega)$$

para todo $B \in \mathcal{H}$ y $\omega \in \Omega - N$.

Cuando la σ-álgebra $\mathcal{G}$ es generada por una variable aleatoria X, es posible reformular los teoremas anteriores de la siguiente manera conveniente.

Teorema. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio métrico completo y separable con su σ-álgebra de Borel. Sean además P una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{I})$ medible. Entonces existe una función $Q : S \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ tal que

i. Para cada $x \in S$ la aplicación $Q(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

ii. Para todo $B \in \mathcal{F}$ la función $Q(\cdot, B)$ es $\mathcal{I}$-medible.

iii. Para todo $B \in \mathcal{F}$ la aplicación $\omega \mapsto Q(X(\omega), B)$ es una versión de $P(B|X)$, i.e. $Q(X, B)$ es $\sigma(X)$-medible y además satisface

$$\int_{\{X \in A\}} Q(X(\omega), B) dP(\omega) = P(\{X \in A\} \cap B)$$

para todo $A \in \mathcal{I}$.

Si Q' es otra función con estas características entonces existe $N \in \mathcal{I}$ con $P(X \in N) = 0$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$ y $x \in S - N$ se tiene

$$Q(x, B) = Q'(x, B).$$

Además, en el caso en que S sea un espacio métrico completo y separable y $\mathcal{I} = \mathcal{B}(S)$, el conjunto N puede elegirse de manera tal que

$$Q(x, \{X \in A\}) = \mathbb{1}_A(x)$$

para todo $A \in \mathcal{I}$ y $x \in S - N$. En particular, tenemos que para P_X-casi todo $x \in S$

$$Q(x, \{X = x\}) = 1.$$

La función Q se dice la *probabilidad condicional regular para $\mathcal{F}$ dada X*.