Apéndice III

Extensión de Kolmogorov

Sea $(S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios métricos completos y separables. Dotamos a cada S_α de una estructura de espacio medible considerando su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_\alpha$.

Notación. Denotaremos por $\mathcal{P}_f(\Gamma)$ a la clase de subconjuntos finitos de Γ.

Definición. Un *cilindro finito-dimensional* en $\prod_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$ es un conjunto de la forma

$$C(J,B) = \left\{ \omega \in \prod_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha : (\omega_\alpha)_{\alpha\in J} \in B \right\}$$

donde $B \in \bigotimes_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha$ y $J \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$.

Definición. Una *familia de distribuciones finito-dimensionales* sobre el espacio $\prod_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$ es una colección $(Q_J)_{J\in\mathcal{P}_f(\Gamma)}$ donde cada Q_J es una probabilidad sobre $(\prod_{\alpha\in J} S_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha)$.

Definición. Decimos que una familia de distribuciones finito-dimensionales $(Q_J)_{J\in\mathcal{P}_f(\Gamma)}$ es *consistente* si para cada par $J_1 \subseteq J_2 \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$ se verifica

$$Q_{J_1}(B) = Q_{J_2}(\pi^{-1}_{J_2,J_1}(B))$$

para todo $B \in \bigotimes_{\alpha\in J_1}$, donde $\pi_{J_2,J_1} : \prod_{\alpha\in J_2} S_\alpha \to \prod_{\alpha\in J_1} S_\alpha$ es la proyección de J_2 en J_1.

Teorema (Extensión de Kolmogorov). Dada $(Q_J)_{J\in\mathcal{P}_f(\Gamma)}$ una familia consistente de distribuciones finito-dimensionales sobre $\prod_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$ existe una única medida de probabilidad P definida sobre $\left(\prod_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{B}_\alpha\right)$ tal que

$$P(\pi^{-1}_{\Gamma,J}(B)) = Q_J(B)$$

para todo $B \in \bigotimes_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha$ y $J \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$.

La demostración de este resultado general es análoga a la del caso particular de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Tanto para el caso general como el de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se usa en la demostración el siguiente resultado, que enunciamos a continuación en su versión general.

Proposición. Dado $J \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$, para cualquier probabilidad Q_J sobre $\left(\prod_{\alpha\in J} S_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha\right)$ se tiene

$$Q_J(B) = \sup\{Q_J(K) : K \subseteq B \text{ compacto}\}$$

para todo $B \in \bigotimes_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha$.[1]

Esta última proposición se deduce de los siguientes resultados.

[1] Aquí los conjuntos K son compactos con respecto a la topología producto en $\prod_{\alpha\in J} S_\alpha$.

1. Sean (S, d_S) un espacio métrico arbitrario y $\mathcal{B}(S)$ su σ-álgebra de Borel asociada. Probar que toda medida de probabilidad P sobre el espacio $(S, \mathcal{B}(S))$ es *regular*, i.e. para cualquier $B \in \mathcal{B}(S)$ y $\varepsilon > 0$ existen G abierto y F cerrado tales que

$$F \subseteq B \subseteq G \qquad \text{y} \qquad P(G - F) < \varepsilon.$$

Definición. Sean (S, d_S) un espacio métrico cualquiera y $\mathcal{B}(S)$ su σ-álgebra de Borel. Una medida de probabilidad P sobre el espacio $(S, \mathcal{B}(S))$ se dice *tensa* (o *tight* en inglés) si dado $\varepsilon > 0$ existe $K \subseteq S$ compacto tal que

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

2. Demostrar que si (S, d_S) es completo y separable entonces toda probabilidad sobre el espacio medible $(S, \mathcal{B}(S))$ es tensa.

3. Deducir que si (S, d_S) es completo y separable entonces para cualquier probabilidad P sobre el espacio medible $(S, \mathcal{B}(S))$ se tiene

$$P(B) = \sup\{P(K) : K \subseteq B \text{ compacto}\}.$$