1. *a*) Sean X e Y variables aleatorias independientes con $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$ e $Y \sim \mathcal{B}i(m,p)$, respectivamente. Probar que $X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$ y hallar $\mathbb{E}(X|X+Y=k)$.

   b) Sean X e Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio con $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Probar que $X|X+Y=k \sim Bi(k,p)$ para cierto $0 < p < 1$ si y sólo si X e Y son independientes y tienen distribución $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$, respectivamente.

2. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1-q=p$ de ser atrapado. Sean X = cantidad de peces que pican e Y = cantidad de peces atrapados.

   a) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados sabiendo que picaron k peces.

   b) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados.

   c) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.

3. Se tienen dos urnas numeradas 0 y 1 con bolas blancas y negras. La urna 0 tiene 2 bolas blancas y 8 negras, mientras que la urna 1 tiene 7 bolas blancas y 3 negras.

   a) Elegimos una urna al azar. Luego sacamos de ella, con reposición, 5 bolas. Definimos las variables aleatorias

   $$\begin{aligned} X = &\ \text{cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones.} \\ Y = &\ \text{urna elegida.} \end{aligned}$$

   Calcular $\mathbb{E}(X|Y=0)$, $\mathbb{E}(X|Y=1)$ y $\mathbb{E}(X)$. Compararlas entre sí.

   b) Ahora cambiamos el procedimiento. Elegimos una urna al azar, y de ella extraemos 1 bola, que luego reponemos en la urna correspondiente. Luego repetimos el experimento 5 veces, de manera independiente. Sea Z = cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones. Hallar $\mathbb{E}(Z)$ y compararla con la $\mathbb{E}(X)$ hallada en el ítem anterior.

4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Probar que

   $$\operatorname{cov}\big(X - \mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(X|Y)\big) = 0.$$

   Interpretar geométricamente.

5. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se define la varianza condicional de X dada Y como la variable aleatoria

   $$\operatorname{Var}(X|Y) := \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X|Y)\big)^2\Big|Y\Big).$$

   Probar que

   $$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}[\mathbb{E}(X|Y)] + \mathbb{E}\big(\operatorname{Var}(X|Y)\big).$$

6. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   a) Supongamos que (X,Y) es un vector discreto con probabilidad conjunta p_{XY}. Sea $g : \mathcal{R}_Y \to \mathbb{R}$ medible Borel tal que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ y definamos $\sigma^2 : \mathcal{R}_Y \to \mathbb{R}$ por la fórmula

   $$\sigma^2(y) = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} (x - g(y))^2 p_{X|Y=y}(x).$$

   Es decir, para cada $y \in \mathcal{R}_Y$, $\sigma^2(y)$ denota la varianza condicional de X dado el evento $\{Y = y\}$. Probar que $\operatorname{Var}(X|Y) = \sigma^2(Y)$.

b) Supongamos que (X, Y) es un vector absolutamente continuo con función de densidad conjunta f_{XY}. Si $\text{sop}(Y) = \{y \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y)\, dx > 0\}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible Borel es tal que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ definamos $\sigma^2 : \text{sop}(Y) \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\sigma^2(y) = \int_{\mathbb{R}} (x - g(y))^2 f_{X|Y=y}(x)\, dx.$$

Probar que $\text{Var}(X|Y) = \sigma^2(Y)$.[1]

7. *a*) Sean X e Y variables aleatorias tales que para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $P(Y \leq y|X)$ es una constante $F(y)$ que no depende de X. Probar que $F_Y(y) = F(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y que X e Y son independientes.

   b) Contando con el resultado del ítem anterior, rehacer el ejercicio 1*b*.

8. Sean X e Y variables aleatorias definidas en un mismo espacio con Y discreta. Probar que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ donde $g : \mathcal{R}_Y \to \mathbb{R}$ se define para cada $y \in \mathcal{R}_Y$ mediante la fórmula

$$g(y) = \frac{1}{P(Y = y)} \mathbb{E}(X 1_{\{Y=y\}}).$$

9. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza y varianza finitas y N una variable aleatoria a valores en $\mathbb{N}$ con esperanza y varianza finitas e independiente de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

   a) Probar que $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

   b) Probar que

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}(N)\text{Var}(X_1) + \mathbb{E}^2(X_1)\text{Var}(N).$$

   c) El número de reclamos recibido por una compañía de seguros en una semana es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ. El monto pagado por cada uno de esos reclamos es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Hallar la esperanza y la varianza del total pagado por la compañía en concepto de reclamos en una semana. ¿Qué hipótesis se están haciendo? ¿Son razonables?

10. Se tiene un bolillero con 100 bolillas, siendo 60 de ellas de color verde y el resto blancas. Se procede a realizar extracciones sucesivas del bolillero obedeciendo la siguiente regla: para cada $n \in \mathbb{N}$, en la n-ésima extracción se sacan del bolillero X_n bolillas, que luego son devueltas a dicho bolillero para proceder con la siguiente extracción. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la cantidad de bolillas X_n extraídas en la n-ésima instancia es

$$X_n = \begin{cases} 10 & \text{si } n = 1 \\ \text{cantidad de bolillas verdes obtenidas en la } (n-1)\text{-ésima extracción} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

   a) Calcular $\mathbb{E}(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Probar que $X_n \xrightarrow{cs} 0$.

   c) Sea S_n la cantidad de bolillas verdes obtenidas en las primeras n extracciones. Calcular $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(S_n)$.

   d) Calcular $\text{Cov}(X_2, X_3)$.

11. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias discretas independientes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Observar que S_n es una variable discreta para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1] Este ejercicio nos presenta una receta para calcular varianzas condicionales en términos de las distribuciones condicionales. Mediante la ecuación a probar en el ejercicio 5, esto nos permite calcular de manera eficiente varianzas a partir de las distribuciones condicionales.

a) Dados números naturales $k < n < m$, mostrar que S_k y S_m son condicionalmente independientes dado S_n, i.e., para todo $x_k \in \mathcal{R}_{S_k}$ y $x_m \in \mathcal{R}_{S_m}$ se verifica

$$P(S_k = x_k, S_m = x_m|S_n) = P(S_k = x_k|S_n)P(S_m = x_m|S_n).$$

Sugerencia: Mostrar que $P(S_k = x_k, S_m = x_m|S_n = x_n) = P(S_k = x_k|S_n = x_n)P(S_m = x_m|S_n = x_n)$ para todo $x_n \in \mathcal{R}_{S_n}$.

b) Mostrar que si $\mathbb{E}(X_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces dados $n < m$ se verifica $\mathbb{E}(S_m|S_n) = S_n$.

12. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 am y las 10:20 am. La partida del mismo se produce con distribución uniforme entre su llegada y las 11 am. Sean X la hora de llegada de dicho tren e Y la hora de su partida.

    a) Calcular $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

    b) Hallar la función de densidad de Y.

    c) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 am y las 10:15 am sabiendo que partió después de las 10:25 am.

13. *a*) Sean X e Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio con $X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$ para $\lambda > 0$. Probar que $X|X + Y = z \sim \mathcal{U}[0, z]$ para todo $z > 0$ si y sólo si X e Y son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

    b) Sean X y Z variables aleatorias que satisfacen $Z \sim \Gamma(2, 1)$ y $X|Z = z \sim \mathcal{U}[0, z]$ para todo $z > 0$.

    i. Calcular $P(Z \geq 2|X \leq 1)$.

    ii. Calcular $P(Z - X \geq 2|X \leq 1)$.

14. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(0, 1)$. Probar que su cociente $\frac{X}{Y}$ tiene distribución de Cauchy sin apelar al teorema de cambio de variables.

15. Dados $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$ sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha} y^{\alpha-1}e^{-\lambda(x+\frac{y}{x})}1_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}(x, y).$$

    a) Hallar la distribución de X y la distribución condicional de Y dada X. Indicar si son distribuciones conocidas.

    b) Calcular $\mathbb{E}(Y|X)$ y $\mathrm{Var}(Y|X)$. Deducir los valores de $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$ y $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

    c) Probar que el cociente $\frac{Y}{X}$ tiene distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$ y es independiente de X sin apelar al teorema de cambio de variables.

16. Un vector aleatorio (X, Y) tiene distribución normal bivariada si tiene función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}.$$

    a) Mostrar que la distribución condicional de X dada Y es $\mathrm{N}\Big(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - \mu_Y), \sigma_X^2(1 - \rho^2)\Big)$.

    b) Calcular $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathrm{Var}(X|Y)$.

    c) Hallar el predictor óptimo lineal de X basado en Y y calcular el error de predicción.[2]

[2] El error de predicción se calcula como $\mathrm{ECM}(X, pl(X|Y)) = \mathbb{E}\left((X - pl(X|Y))^2\right)$, donde $pl(X|Y)$ es el predictor óptimo lineal de X basado en Y.

17. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional tal que $f_{X|Y=y}(x) = \frac{3x^2}{y^3} 1_{(0,y)}(x)$ y$f_Y(y) = 5y^4 1_{(0,1)}(y)$.

   a) Calcular la función de densidad del cociente $\frac{X}{Y}$ y probar que es independiente de Y sin apelar al teorema de cambio de variables.

   b) Hallar la densidad condicional $f_{Y|X=x}$ para cada $x \in (0, 1)$.

18. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim \Gamma(r, \theta)$ con $r \in \mathbb{N}$ y $X|Y = y \sim \mathcal{P}(\lambda y)$ para todo $y > 0$.

   a) Probar que $X + r \sim \text{BN}(r, \frac{\theta}{\lambda+\theta})$.

   b) Probar que $Y|X = k \sim \Gamma(r + k, \lambda + \theta)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y calcular $\mathbb{E}(\frac{Y}{r+X})$.

19. Sea (X, Y) un vector aleatorio a valores en $\{0, 1, \ldots, n\} \times (0, 1)$ tal que para todo $k = 0, \ldots, n$ y $0 \leq t \leq 1$

$$P(X = k, Y \leq t) = \int_0^t \frac{\Gamma(p + q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \binom{n}{k} y^{p+k-1}(1 - y)^{q+n-k-1} dy.$$

   para ciertos $p, q > 0$.

   a) Hallar la distribución condicional de Y dado X y calcular $\mathbb{E}(\frac{Y}{p+X})$.

   b) Hallar la distribución condicional de X dado Y y calcular $\mathbb{E}(XY)$.
   Sugerencia. Hallar también la distribución de Y y verificar si se trata de una distribución conocida.

20. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible Borel tal que $\mathbb{E}(|g(X)|) < +\infty$.

   a) Utilizando argumentos intuitivos, ver que

$$\mathbb{E}\left(g(X)|X^2 = t\right) = \frac{g\left(\sqrt{t}\right) f_X\left(\sqrt{t}\right) + g\left(-\sqrt{t}\right) f_X\left(-\sqrt{t}\right)}{f_X\left(\sqrt{t}\right) + f_X\left(-\sqrt{t}\right)}$$

   b) Utilizando la definición de esperanza condicional, probar que

$$\mathbb{E}\left(g\left(X\right)|X^2\right) = \frac{g\left(\sqrt{X^2}\right) f_X\left(\sqrt{X^2}\right) + g\left(-\sqrt{X^2}\right) f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}{f_X\left(\sqrt{X^2}\right) + f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}$$

   c) Observar que si $X \in L^2$ vale que $\mathbb{E}\left(X^2|X\right) = X^2$ mientras que $\mathbb{E}\left(X|X^2\right) \neq X$. ¿Es razonable esto?

21. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim \mathcal{U}[2, 3]$ y para cada $y \in [2, 3]$ se verifica

x	-1	0	1
$p_{X\vert Y=y}(x)$	$\frac{3-y}{2}$	$y-2$	$\frac{3-y}{2}$

   a) Hallar p_X.

   b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ para cada $x \in \mathcal{R}_X$.

22. Sean X e Y variables aleatorias tales que X es discreta con probabilidad puntual

x	1	2
$p_X(x)$	1/4	3/4

y la distribución condicional de Y dada X es $\varepsilon(X)$.

a) Calcular $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$.
b) Calcular $P(X = x, Y \leq y)$ para $y > 0$ y $x \in \mathcal{R}_X$.
c) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ sea $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación medible Borel tal que $P(X = x|Y) = g_x(Y)$. Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ expresar $P(X = x, Y \leq y)$ en términos de g_x .
d) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ calcular explícitamente $P(X = x|Y)$.

23. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con segundo momento finito.

a) Hallar $\mathbb{E}(X_1|X_1 + \cdots + X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sugerencia: Probar que $\mathbb{E}(X_1|X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_k|X_1 + \cdots + X_n)$ para todo $k = 2, \ldots, n$.
b) Probar que $\mathbb{E}(X_1|X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{cs} \mathbb{E}(X_1)$.