

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| < 1, 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- (a) Hallar f_X y f_Y . ¿Son X e Y independientes?
 (b) Hallar la distribución de $\frac{Y}{X^2}$.
 (c) Hallar la densidad conjunta del vector $(X^2, \frac{Y}{X^2})$.
2. Sea $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ un vector aleatorio de marginales Z_1 y Z_2 independientes y con distribución $N(0, 1)$. Dada $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversible y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, sea $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ el vector aleatorio definido por $\mathbf{Y} = A \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{c}$.

- (a) Mostrar que la función de densidad conjunta de $\mathbf{Y}$ viene dada por

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi [\det(\Sigma)]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \right\}. \quad (1)$$

donde $\mu = \mathbf{c}$ y $\Sigma = A \cdot A^t$.

Definición. Sea $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ una matriz simétrica definida positiva y $\mu \in \mathbb{R}^k$ y sea $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^k$ con densidad conjunta dada por

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} [\det(\Sigma)]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \right\}.$$

Entonces decimos que el vector $\mathbf{Y}$ tiene **distribución normal multivariada k -dimensional** (bivariada si $k = 2$) de parámetros μ y Σ y lo denotamos por $\mathbf{Y} \sim N_k(\mu, \Sigma)$.

- (b) ¿Cuáles son las curvas de nivel de $f_{\mathbf{Y}}$?
 (c) Hallar las densidades marginales de Y_1 e Y_2 .
 (d) ¿Son Y_1 e Y_2 independientes?
 (e) Sea $\mathbf{X} \sim N_k(\mu, \Sigma)$ (es decir, sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio continuo con densidad conjunta como en 1). Probar que existen $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $\det A \neq 0$ tales que $\mathbf{X} = A \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{c}$ para cierto vector aleatorio $\mathbf{Z}$ de marginales independientes con distribución $N(0, 1)$, o sea, un vector aleatorio $\mathbf{X}$ tiene distribución normal multivariada si y sólo si es una transformación afín de un vector $\mathbf{Z}$ de coordenadas independientes con distribución normal estándar. Comparar con lo que sucede con la distribución normal en $\mathbb{R}$.
 (f) Sean $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con distribución $N_2(\mu, \Sigma)$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ y $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $\det B \neq 0$. Probar que $\mathbf{Y} = B \cdot \mathbf{X} + \mathbf{d} \sim N_2(B \cdot \mu + \mathbf{d}, B \cdot \Sigma \cdot B^t)$.
3. Se elige un punto P al azar en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ y se trazan por P las paralelas a los ejes de coordenadas. Dichas paralelas cortan al eje vertical en un punto Q y a la recta $y = x$ en un punto R , determinando así el trapecio $0QPR$.

- (a) Hallar la distribución del perímetro de trapecio.
 (b) Hallar la probabilidad de que dicho perímetro sea menor o igual a 1.

4. Sea X una variable aleatoria y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$Y_n = \min\{n, X\} \quad \text{y} \quad Z_n = \max\{n, X\}.$$

Decidir si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tienen límite en distribución y explicitar dicho límite en caso de que exista.

5. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$. Probar que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$.