Modelo Lineal

PRACTICA 0

1. Probar que

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

b) $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$

c) $\mathrm{Tr}(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(A_i)$

d) $\mathrm{Tr}(k\,A) = k\,\mathrm{Tr}(A)$, siendo k un escalar

e) $\mathrm{Tr}(S^{-1}\,A\,S) = \mathrm{Tr}(A)$

2. Sea X un vector columna. Explicar por qué

a) $X'\,A\,X = X'\,A'\,X$, aún cuando A no sea simétrica

b) $X'\,B\,X = \mathrm{Tr}(X'\,B\,X)$

c) $\mathrm{Tr}(C\,X\,X') = X'\,C\,X$.

3. Si A y B son matrices de órdenes $n \times m$ y $m \times p$ respectivamente, probar que

$$\mathrm{rg}(A\,B) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)).$$

4. Probar que

a) $\mathrm{rg}(A\,A') = \mathrm{rg}(A'\,A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$

b) Si P y Q son matrices no singulares, $\mathrm{rg}(P\,A\,Q) = \mathrm{rg}(A)$

5. Si A es una matriz simétrica de orden n y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son sus autovalores, probar que

a) $\mathrm{Tr}(A) = \sum \lambda_i$

b) $\mathrm{Tr}(A^s) = \sum \lambda_i^s$

c) $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \sum \frac{1}{\lambda_i}$, si A es no singular.

d) $\det(A) = \prod \lambda_i$

e) $\mathrm{rg}(A)$ es el número de autovalores no nulos de A.

6. Sea A una matriz ortogonal, probar que

a) $|\det(A)| = 1$.

b) si λ es un autovalor de A, entonces $1/\lambda$ también lo es.

c) si A es simétrica, todas sus potencias son la misma matriz o la identidad.

7. Si A es idempotente y simétrica de orden n, probar que

a) los autovalores de A son iguales a 0 ó 1.

b) $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(A)$.

c) $(I - A)$ es simétrica e idempotente.

d) Deducir que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(I - A) = n$.

8. Si A es una matriz idempotente y simétrica,probar que

a) si $\det\,(A) \neq 0$, entonces $A = I$.

b) $A = B\,B'$ con $B'\,B = I$.

c) A^k tiene los mismos autovalores que A y por lo tanto tiene el mismo rango que A.

9. Probar que

a) Para A y B simétricas e invertibles, $[(A\,B)']^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$.

b) $P = X\,(X'\,X)^{-1}\,X'$ es simétrica e idempotente.

c) Hay una sola matriz que es idempotente y ortogonal.

10. Sea G una inversa generalizada de $X'\,X$, probar que

a) G' es una inversa generalizada de $X'\,X$.

b) $G\,X'$ es una inversa generalizada de X.

c) $X\,G\,X'$ es invariante por G.

d) $X\,G\,X'$ es simétrica aunque G no lo sea.

Sugerencia: Probar que si $X'\,X\,P = X'\,X\,Q$, entonces $X\,P = X\,Q$ y si $P\,X'\,X = Q\,X'\,X$, entonces $P\,X' = Q\,X'$

11. La matriz $I - P = I - X\,(X'\,X)^{-}\,X'$ satisface

a) es simétrica, idempotente e invariante por $(X'\,X)^{-}$.

b) $(I - P)\,X = 0$ y $X'\,(I - P) = 0$.

12. Si A y D son simétricas y todas las inversas existen, probar que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + F\,E^{-1}\,F' & -F\,E^{-1} \\ -E^{-1}\,F' & E^{-1} \end{pmatrix}$$

con $E = D - B'\,A^{-1}B$ y $F = A^{-1}B$.

13. Si A es una matriz cuadrada de orden n, no singular y X es un vector de dimensión n, probar que

$$(A + X\,X')^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\,X\,X'\,A^{-1}}{1 + X'\,A^{-1}\,X}.$$

14. Sea A una matriz simétrica definida positiva.

a) Probar que sus autovalores son todos positivos.

b) A es definida positiva si y sólo si existe R no singular tal que $A = R\,R'$.

c) A^{-1} es definida positiva.

d) $\mathrm{rg}(C\,A\,C') = \mathrm{rg}(C)$.

e) Si A es de orden n y C es una matriz de dimensión $p \times n$, de rango p, entonces $C\,A\,C'$ es definida positiva.

f) Si X es de dimensión $n \times p$ y de rango p, entonces $X'\,X$ es definida positiva.