

Práctica 9

Notaciones y definiciones

★ $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en } \mathbb{R}\}$

★ $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt \quad f \in G(\mathbb{R})$

★ $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt \quad f, g \in G(\mathbb{R})$

Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de L^1

a) $e^{-|x|}$

b) $\frac{1}{1+x^2}$

c) e^{-ax^2}

d) $\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$

e) $\begin{cases} 0 & |x| > A \\ 1 & |x| < A \end{cases}$

f) $\begin{cases} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & x \notin [0, a) \end{cases}$

2. Sean $f, g \in G(\mathbb{R})$. Probar las siguientes propiedades de la convolución:

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right)$

3. Sea $f \in G(\mathbb{R})$. Probar:

a) $g(x) = e^{iax}f(x) \Rightarrow g \in L^1 \text{ y } \hat{g}(t) = \hat{f}(t-a)$

b) $g(x) = f(x+a) \Rightarrow g \in L^1 \text{ y } \hat{g}(t) = e^{iat}\hat{f}(t)$

c) $g \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

d) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

e) $g(x) = f(\frac{x}{a}), \quad a > 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = a\hat{f}(at)$

f) $g(x) = -ixf(x) \text{ y } g \in L^1 \Rightarrow \hat{g} \text{ es derivable y } \hat{g}' = \hat{f}$

g) $f^{(n)} \in C^n \Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$

- h) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{f})$ es par e $\operatorname{Im}(\hat{f})$ es impar.
- i) $g(x) = f(ax + b), \quad a \neq 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$
- j) $g(x) = f(x) \cos(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$
- k) $g(x) = f(x) \operatorname{sen}(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$
- l) f continua y $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$
4. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$
- a) Comprobar que $\hat{f}(t) = 2 \frac{\operatorname{sen} t}{t}$.
- b) Verificar que:
- i) $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c, d] \\ 0 & x \notin [c, d] \end{cases} = f\left(\frac{2}{d-c}x + \frac{d+c}{d-c}\right)$
- ii) $k(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \notin [0, \pi] \end{cases} = \operatorname{sen} x f\left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)$
- c) Calcular $\hat{h}$ y $\hat{k}$ usando el ejercicio 3.
5. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^1 .
- a) $e^{-a(x-b)^2} \quad (a > 0, b \in \mathbb{R})$ b) $e^{-x^2} \operatorname{sen}(ax)$ c) $\frac{1}{x^2 + a^2}$
6. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^2 .
- a) $\frac{x}{x^2 + 1}$ b) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ c) $\frac{x^3}{1 + x^4}$
- d) $\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}$ e) $\frac{x}{x^2 + x + 1}$ f) $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \quad (a > 0)$
- Sean $f, g \in L^2$, continuas a trozos. Se tienen las siguientes propiedades:
- a) $f \pm g, f \pm ig \in L^2$.
- b) i) $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2 dt$
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2 dt$
- c) Identidad de Parseval:
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t)} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

7. Usando la identidad de Parseval, calcular las siguientes integrales.

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-ita}}{it} \right|^2 dt, (a > 0) \quad \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at) \sin(bt)}{t^2} dt$$

8. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

$$\text{a)} \frac{\sin(au)}{u} \quad \text{b)} \frac{1 - \cos(au)}{u} \quad \text{c)} e^{-u^2} \quad \text{d)} \frac{u}{u^2 + 1}$$

9. a) Hallar la transformada inversa de Fourier de: $g(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^2}$ interpretándola como la transformada de una convolución.
 b) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)} g(y) dy$, en función de $\hat{g}$.

• **Regla de Leibniz**

Sea $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds$.
 Entonces:

a) g es continua.

b) Si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ entonces g es C^1 y $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds$

10. Resolver transformando Fourier en la variable x

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = e^{-x^2} \\ \text{b)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = e^{-x^2} \\ \text{c)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} = u \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = 6e^{-3x} h(x) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

11. Resolver utilizando la transformada de Fourier

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

12. Utilizar la transformada de Fourier para encontrar una solución explícita de la siguiente ecuación diferencial para la función $u = u(x, y)$,

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

(problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un semiplano) donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es dada. Obtener una fórmula integral de la forma

$$u(x, y) = (P_y * f)(x)$$

donde P_y es un núcleo (conocido como el núcleo de Poisson).

13. a) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial, para la función $u = u(x, t)$,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{(x, t) : t > 0\} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es dada (problema de Cauchy para la ecuación del calor). Obtener una fórmula integral cómo en el ejercicio anterior, ¿qué núcleo interviene?

- b) Encontrar la solución explícita cuando

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- c) ¿Qué sucede si cambiamos la ecuación por $u_t = iu_{xx}$? (ecuación de Schrödinger)

14. (a) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial, para la función $u = u(x, t)$,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{en } \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ecuación de las ondas) para u_0 y v_0 suficientemente regulares.

- (b) Probar que la energía

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2) dx$$

es constante en el tiempo.