Práctica 8

1. **a)** Verificar que
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$
converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ pero que (f_n) *no* converge a cero en media cuadrática.

   b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en [0,1] pero que (f_n) *no* converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.

   c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

2. Encontrar los valores A_1, A_2 y A_3 de modo que la función
$$y = A_1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}x)$$
sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b\cos x - c \operatorname{sen} x)^2 \, dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.

4. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a $\mathbb{R}$ con período 2π. Sean c_n $(n \in \mathbb{Z})$, a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ y b_n $(n \in \mathbb{N})$ los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

   a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.

   c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

5. **a)** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ para:

   (i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

   (ii) $f(x) = x$

   (iii) $f(x) = x^2$

   (iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando **(iii)**, calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, y extendiendo f por periodicidad a $\mathbb{R}$, probar que:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

6. **a)** A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función $2\pi-$periódica que coincide con e^x en $(-\pi, \pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en **a)**, a partir del desarrollo en serie exponencial.

7. Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

8. Sea f una función de período 2π que –en $[-\pi, \pi]$– se define como $f(x) = \cos(ax)$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$, $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

9. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f.

10. **a)** Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) Probar que: $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

11. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x+2) = f(x) \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x.

- Sea f integrable en $[-p,p]$ y tal que $f(x+2p)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

  a) Entonces,

  - $\displaystyle\int_{a-p}^{a+p} f(t)\ dt = \int_{-p}^{p} f(t)\ dt$ para todo $a\in\mathbb{R}$
  - $\displaystyle\int_{2p}^{2p+x} f(t)\ dt = \int_{0}^{x} f(t)\ dt$ para todo $a\in\mathbb{R}$

  b) Si $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, entonces:

$$g(x+2p)=g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-p}^{p} f(t)\ dt = 0$$

12. Probar que si f es integrable y $2p-$periódica:

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)(p-x)\ dx = \sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{nw_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0=\frac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el resultado anterior e integración por partes.

13. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0,\pi)$:

a) $f(x)=\cos x$ **b)** $f(x)=-x$ **c)** $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}\leq x<\pi \end{cases}$

14. Calcular el desarrollos en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

a) $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x=\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$

b) $f(x)=x \quad (0\leq x<\pi)$

15. Sea f $2p-$periódica e integrable. Se define:

$$F(t)=\int_0^t f(x)\ dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\ dx$. Demostrar que F es $2p-$periódica.

16. Sea $f\in\mathcal{C}^1$ y g una función derivable, ambas $2p-$periódicas con desarrollos exponenciales de Fourier:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t} \qquad \omega=\frac{\pi}{p}$$

Probar que la función $h(t) = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t-x)g(x)\ dx$ también es derivable y $2p-$periódica y se puede expresar como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$$

17. **a)** Probar que la serie $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

    b) Calcular la $n-$ésima suma parcial de esta serie.

18. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ $2\pi-$periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también $2\pi-$periódica.

    a) ¿Qué relación hay entre f y g?

    b) Calcular las series de Fourier de f y de g.

    c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f. ¿Es la serie de Fourier de g? ¿Converge?

19. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$, sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \qquad\qquad T(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{n.\operatorname{sen}(2nx)}{4n^2-1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g.

   a) ¿Se puede afirmar que $f(x) = S(x)$ y que $g(x) = T(x)$?

   b) ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?

   c) ¿Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extensiones de f y de g a $\mathbb{R}$.

20. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea $f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \operatorname{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

21. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \ \text{ en } \ [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x \ \text{ en } \ [-\pi, \pi)$$

   a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.

b) Determinar la función $h(x)$ sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4\sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h.

22. Desarrollar $\operatorname{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

    Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

23. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r\cos t}\cos(r\operatorname{sen} t) \qquad g(t) = e^{r\cos t}\operatorname{sen}(r\operatorname{sen} t) \qquad h(t) = \frac{1}{1-re^{it}} \quad 0 < r < 1.$$

Separación de variables

24. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

    a) $u'' + \lambda u = 0$, para $0 < x < \pi$ y con las siguientes condiciones de contorno:

    i) $u(0) = u(\pi) = 0$

    ii) $u'(0) = u'(\pi) = 0$

    iii) $u(0) = u'(0) = 0$

    b) $u'' + \lambda u = 0$, $-\pi < x < \pi$, $u(-\pi) = u(\pi)$ y $u'(-\pi) = u'(\pi)$

25. Usando separación de variables resolver:

    a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0,y) = 8e^{-3y}.$

    b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0.$

    $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $|u(x,t)| < M$, $u(x,0) = 5\operatorname{sen}(4\pi x) - 3\operatorname{sen}(8\pi x) + 2\operatorname{sen}(10\pi x)$.

    c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0,$

    $u(x,0) = 8\cos\left(\dfrac{3\pi x}{4}\right) - 6\cos\left(\dfrac{9\pi x}{4}\right).$

26. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema (ecuación del calor):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{en } (0,2)\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x\in(0,2) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t\in(0,\infty) \end{cases}$$

con $f(x) = x^2 - 2x$ en $(0,2)$

27. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema (ecuación de las ondas):

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad \text{en}(0,1)\times(-\infty,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x\in(0,1) \\ u_t(x,0) = 0, \quad x\in(0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t\in(0,\infty) \end{cases} \qquad \text{donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\le x\le 1/2 \\ 1-x & \text{si} \quad 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

28. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema (ecuación de las ondas con rozamiento):

$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{en}(0,\pi)\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(2x), \quad x\in(0,1) \\ u_t(x,0) = 0, \quad x\in(0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t\in(0,\infty) \end{cases}$$

29. Utilizando series de Fourier, encontrar la solución del siguiente problema en coordenadas polares (r,θ):

$$\begin{cases} \Delta u &= & 0 & \text{en el disco} \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2<1\} \\ u(x,y) &= & f(\theta) & \text{en } \partial D \end{cases}$$

Encontrar una expresión integral de la solución. (Problema de Dirichlet en el disco).

Si v es una conjugada armónica de u, ¿qué expresión se obtiene de v en términos de series de Fourier? ¿Qué relación existe con el desarrollo de Laurent de $F = u + iv$ en el disco D ?