Práctica 2

1. **a)** Sea $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ una sucesión, probar que

$$z_n \to z \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z)$$

b) Se dice que una sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $|z_n - z_m| < \varepsilon$. Se sabe que en $\mathbb{R}$ una sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente (es una forma de expresar la completitud de los números reales).

Probar que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y sólo si lo son las sucesiones reales $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\geq 1}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\geq 1}$.

c) Deducir que en $\mathbb{C}$ se sigue verificando que una sucesión converge si y sólo si es de Cauchy.

d) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$. ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca?

2. Escribir los primeros términos y calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) ni^n **b)** $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ **c)** $\left(\frac{(-1)^n + i}{2}\right)^n$

d) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ **e)** $\frac{n+1}{n} + i\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ **f)** $\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$

g) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **h)** $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ **i)** z^{-n}

3. Probar

a) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z\to a} \overline{f(z)} = \overline{L}$

b) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$ y $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$

4. Calcular

a) $\lim_{z\to -2i} \frac{z^2 + 2(1+i)z + 4i}{z+2i}$ **b)** $\lim_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-i}$

c) $\lim_{z\to -i} z\cdot\overline{z}$ **d)** $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{z}$

e) $\lim_{z\to i} f(z)$ con $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & , z \neq i \\ 3 + 2i & , z = i \end{cases}$ **f)** $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3 - 3iz + 2 + i}{z^4 + iz^2 - (3+4i)z + 6}$

5. Probar la continuidad de las siguientes funciones en el dominio indicado:

   a) z, $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ en $\mathbb{C}$.

   b) $\dfrac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

6. Hallar los puntos de discontinuidad de:

   a) $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + 1}$

   b) $f(z) = \dfrac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + 1}$

   $(z = x + iy)$

7. Sea $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \to (-\pi, \pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|\ e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

   Nota: dado $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de** z y se lo nota: $\varphi(z) = \mathrm{Arg}(z)$.

8. Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones definidas para $z \neq 0$.

   a) $f(z) = \arg(z)$

   b) $f(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$

9. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z = 0$ de modo tal que resulten continuas en $\mathbb{C}$?

   a) $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$

   b) $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

   c) $\dfrac{(\mathrm{Re}(z))^2}{|z|}$

   d) $\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$