Práctica 10

1. **Función Gama**

   La función $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ dada por
   $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$
   se llama *función Gama*.

   a) Probar que:
   $\star$ $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$.
   $\star$ $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Dado $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Re}(z) < 0$ se define:
   $$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$
   si $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{Re}(z+n) > 0$. Mostrar que la definición no depende del $n \in \mathbb{N}$ elegido.

   c)† Probar que $\Gamma(z)$ converge uniformemente en toda banda vertical de la forma $0 < \epsilon \leq \mathrm{Re}(z) \leq M$.
   Deducir de c) y de b) que Γ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Transformada de Laplace

2. Hallar la transformada de Laplace de:

   a) $\operatorname{sen} x$ **b)** x^3 **c)** $(x+b)^2$

3. Para $s > 0$ y $p > -1$, probar que: $\mathcal{L}(t^p)(s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

4. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

   a) s^{-2} **b)** $s^{\frac{-1}{2}}$ **c)** $(s^2 - a^2)^{-1}$

   d) $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ **e)** $\dfrac{1}{s^2+s+2}$ **f)** $\dfrac{e^{-3s}}{s^2+s+2}$

   g) $(s-2)^{\frac{-1}{2}}$ **h)** $\dfrac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{s^2+2s}$ **i)** $\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$

   j) $\log(1+s^{-1})$ **k)** $\log\left(\dfrac{s+6}{s+2}\right)$

5. **a)** Hallar f tal que:

   (i) $f(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u)e^u\, du + \mathrm{ch}(t)$

   (ii) $f(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t f(t) \operatorname{sen}(t-u)\, du$

   b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t)$

   c) Probar que $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{\frac{-1}{s}}}{\sqrt{s}}\right)(t) = \dfrac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$, $s, t > 0$.

6. Resolver, para $x > 0$:

   a) $u'' + 2u' + u = e^{-x}$ con: $u(0) = u'(0) = 0$

   b) $u'' + u' + u = \operatorname{sen} x$ con: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

   c) $x\,u'' + u' + x\,u = 0$ con: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$

   Nota: en **c)** hallar solo la transformada de Laplace de u.

7. Transformando Laplace, hallar $u(x,t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ y de orden exponencial respecto de t, definida para $(x,t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, solución de la ecuación:
   $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 4\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$
   $u(x,0) = 2e^{-3x}$.

   Sugerencia: Recordar que si $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial, $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

8. Transformando Laplace, hallar $u(x,t)$ solución de:

   a) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\,u(x,t) = 0$

   $u(x,0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$

   b) $y'(t) + 7\displaystyle\int_0^t \cos(3t - 3\tau)y(\tau)d\tau = 1 \quad (t \geq 0)$

   $y(0) = 2$