

Práctica No. 4

1. Sean $f : C \rightarrow D$, $A, B \subseteq C$ y $X, Y \subseteq D$. Decidir en cada caso si corresponde \subseteq, \supseteq ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{llll}
 (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\
 (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
 (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\
 (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
 (v) & f(C \setminus A) & \dots\dots & D \setminus f(A) \\
 (vi) & f^{-1}(D \setminus X) & \dots\dots & C \setminus f^{-1}(X)
 \end{array}$$

2. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : S \rightarrow T$. Probar que f es continua si, y sólo si, para todo $F \subseteq T$, cerrado relativo en T , $f^{-1}(F) \subseteq S$ es un conjunto cerrado relativo en S .
3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre \mathbb{Q}^n son la misma función.
4. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 < xy + z < 2\}$.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.
6. (a) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Probar que son equivalentes:
- i. S es conexo
 - ii. Dados $G, H \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, tales que $S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$ y $S \cap G \cap H = \emptyset$, se tiene que $G \cap S = \emptyset$ o $H \cap S = \emptyset$.
- (b) Mostrar que \mathbb{Q} no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?

- (c) ¿Es \mathbb{R} conexo? (cf. ejercicio 10, Práctica 3)
- (d) Demostrar que el intervalo $[0, 1]$ es conexo y que por lo tanto cualquier intervalo $[a, b]$ también lo es.
- (e) Usando la función continua $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ y la parte (b), demostrar que el intervalo $(-1, 1)$ es conexo. Deducir que cualquier intervalo de la forma (a, b) es conexo.
7. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ distintos, sea $\overline{vw} = \{v + t(w - v) : t \in [0, 1]\}$ el segmento que une v y w .
- (a) Demostrar que \overline{vw} es un conjunto conexo.
- (b) Sea ahora u otro punto en \mathbb{R}^n . Demostrar que la poligonal $\Pi := \overline{vw} \cup \overline{wu}$ es un conjunto conexo y convencerse de que cualquier poligonal en \mathbb{R}^n es un conjunto conexo.
- (c) Demostrar que dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en el conjunto (además formada por segmentos “horizontales” y “verticales”) y deducir que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ es conexo.
- (d) Demostrar que un conjunto abierto y conexo $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S . [Sug.: Dado $p \in S$ arbitrario considere los conjuntos $G := \{x \in S / \text{se unen a } p \text{ con una poligonal contenida en } S\}$ y $H := S - G$.]
8. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. [Sug.: considere la función continua $x - f(x)$.]
9. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^{n+m} . ¿Vale la recíproca?
10. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función tal que la imagen de f es un conjunto acotado y el gráfico de f es un conjunto cerrado. Demostrar que f es continua.
11. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.
12. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \|x\|$.
- (b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \|x\|^2$.
- (c) $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
- (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x, y) = x^2 + 3y$.
- (e) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
13. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.
- (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
- (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua.
- (c) Probar que si $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ también lo es.

14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $A \cup B$?

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0 .

16. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

17. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular “unif. cont. $\not\Rightarrow$ Lipschitz”).

18. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. En particular, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|f(x) - f(x')\| \leq M \|x - x'\|$, $\forall x, x' \in S$. Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f tiene un punto fijo.

[Sug.: considere la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.]

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

19. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

20. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : K \rightarrow K$ una función que verifica que la desigualdad $\|f(x) - f(x')\| < \|x - x'\|$ vale para todo $x, x' \in K$ (en particular, f es Lipschitz con $M = 1$).

(a) Demostrar que f tiene un punto fijo.

(b) Comparar con los ejercicios 8, 18 y 19.

[Sug.: considere la función $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \|x - f(x)\|$.]

21. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:

(a) $f_n(x) = x^n$, $S = (-1, 1]$.

(b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.

(c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.

22. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 21(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.
 (b) Probar que la sucesión del ejercicio 21(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.
23. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

(a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo \mathbb{R} .

(b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo \mathbb{R} .

(c) $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$, sobre todo \mathbb{R}^2 .

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}, b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$, sobre $[0, 1]$.

24. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en \mathbb{R} a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

25. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

(a) f es acotada.

(b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

26. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de S en \mathbb{R} que convergen uniformemente a funciones $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ respectivamente.

(a) Probar que $f_n + g_n$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Probar que si f_n y g_n están acotadas para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $f_n g_n$ converge uniformemente a $f g$.

(c) Mostrar que el ítem (b) no vale sin la hipótesis de acotación.

27. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

(a) Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.

(b) Verificar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$.