A) Familias exponenciales.

1. Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales. En cada caso, hacer una elección explícita de $a(\theta)$, $h(\mathbf{x})$, $c_j(\theta)$ y $t_j(\mathbf{x})$ y exhibir un estadístico suficiente para θ.

   (a) $\mathcal{P}(\theta)$; $\theta > 0$.

   (b) $N(\mu, \sigma^2)$; $\theta = (\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in I\!R$ y $\sigma^2 > 0$.

   (c) $\Gamma(r, \lambda)$; $\theta = (r, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.

   (d) $\mathcal{M}(n, \theta_1, \ldots, \theta_k)$; $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, con $0 < \theta_j < 1$, $\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$ y n conocido.

   (e) $BN(r, \theta)$; $0 < \theta < 1$ y r conocido.

   (f) $\beta(r, s)$; $\theta = (r, s)$, con $r, s > 0$.

2. Consideremos la familia de distribuciones normales bivariadas $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, donde $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, con $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $|\rho| < 1$, cuya densidad conjunta es:

$$f(x, y; \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \exp\left\{ -\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{2(1-\rho^2)} \right\}$$

   (a) Probar que esta familia es exponencial.

   (b) Encontrar un estadístico suficiente para θ a partir de una m.a. $X_1, \ldots, X_n$.

3. (a) Sea $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ una familia exponencial. Probar que el soporte de $f(x; \theta)$ no depende de θ.

   (b) Mostrar que la familia $\{\mathcal{U}(0, \theta) : \theta > 0\}$ no es exponencial.

4. (a) Sea $\{f(\mathbf{x}; \theta_1, \theta_2) : \theta \in \Theta\}$ una familia exponencial a dos parámetros en forma canónica (es decir que $c_j(\theta) = \theta_j$). Sea $T = (T_1, T_2)$ el estadístico suficiente canónico (es decir, el estadístico asociado a $(c_1(\theta), c_2(\theta))$. Demostrar que la distribución de $T_2|T_1$ pertenece a una familia exponencial de parámetro θ_2.

   (b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Por lo tanto los parámetros canónicos son $\theta_1 = \mu/\sigma^2$ y $\theta_2 = -1/2\sigma^2$, y el estadístico suficiente canónico es $T = \left(\sum X_i, \sum X_i^2\right)$. Verificar que la distribución de $\sum X_i^2$ condicional a $\sum X_i$ pertenece a una familia exponencial cuyo parámetro no depende de μ.

   Sugerencia: usar que $\sum X_i$ y $\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2$ son independientes.

5. Consideremos $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una $f(\mathbf{x}; \theta)$ que pertenece a una familia exponencial a k parámetros en forma canónica. Sea $\psi(\theta)$ tal que $a(\theta) = \exp\{-\psi(\theta)\}$. Mostrar que el EMV de θ satisface el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_j}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_j(\mathbf{X}_i), \text{para} \quad j = 1, \ldots, k.$$

B) Estimadores IMVL e IMVU.

6. Sea δ_0 un estimador insesgado de $q(\theta)$. Definamos la clase de estadícos
$$\mathcal{U} = \{U : E_\theta(U) = 0 \quad \forall \quad \theta\}.$$
Probar que cualquier estimador insesgado de $q(\theta)$ es de la forma $\delta = \delta_0 - U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

7. Sea X una v.a. tal que $R_X = \{-1\} \cup I\!N_0$ cuya función de probabilidad puntual está dada por
$$p_X(-1) = \theta, \;\; p_X(k) = (1-\theta)^2 \theta^k \text{ si } k \in I\!N_0, \text{ para } \theta \in (0,1).$$
   (a) Sean $\delta_1 = I\{X = -1\}$ y $\delta_2 = I\{X = 0\}$. Probar que δ_1 es un estimador insesgado de $q_1(\theta) = \theta$ y δ_2 es un estimador insesgado de $q_2(\theta) = (1-\theta)^2$.
   (b) Mostrar que $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si $U = aX$ para alguna constante $a \in I\!R$.
   Sugerencia: usar que $1/(1-r)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} kr^{k-1}$ si $|r| < 1$.
   (c) Se define el *Estimador de Mínima Varianza Local para $q(\theta)$ en $\theta = \theta_0$ basado en la muestra aleatoria* $X_1, \ldots, X_n$, es decir el IMVL de $q(\theta)$ *en* $\theta = \theta_0$ basado en la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ a un estadístico $\delta^*(X_1, \ldots, X_n) = \delta^*$ que satisface
      - $E_\theta(\delta^*) = q(\theta)$ $\forall\theta$, es decir es un estimador insesgado de θ
      - Si δ es cualquier otro estimador insesgado de θ, entonces $Var_{\theta_0}(\delta^*) \le Var_{\theta_0}(\delta)$.

   Encontrar los estimadores IMVL de $q_1(\theta)$ y $q_2(\theta)$ en $\theta = \theta_0$.
   (d) Probar que existe un estimador IMVU para $q_2(\theta)$ pero no para $q_1(\theta)$.

8. (a) Sea δ un estimador insesgado de $q(\theta)$, demostrar que δ es IMVL de $q(\theta)$ en $\theta = \theta_0$ si y sólo si para todo $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_{\theta_0}(U) < \infty$ se tiene que $E_{\theta_0}(\delta U) = 0$.
   (b) Si δ_1 y δ_2 son IMVL de $q(\theta)$ en $\theta = \theta_0$, probar que $P_{\theta_0}(\delta_1 = \delta_2) = 1$.

9. Sea X una v.a. como en el ejercicio 7. Probar que $q(\theta)$ tiene un estimador IMVU si y sólo si es de la forma $q(\theta) = a + b(1-\theta)^2$ para $a, b \in I\!R$.
   Sugerencia: extender el ejercicio 8 para estimadores IMVU.

10. Sean δ_1 y δ_2 dos estimadores IMVU de $q_1(\theta)$ y $q_2(\theta)$ respectivamente, y $c_1, c_2 \in I\!R$. Demostrar que $c_1\delta_1 + c_2\delta_2$ es IMVU de $c_1 q_1(\theta) + c_2 q_2(\theta)$.

C) Completitud.

11. Consideremos una familia $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ y sea T un estadístico suficiente para $\mathcal{P}$. Supongamos que $\delta(T)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$. Entonces δ es el único estimador insesgado que es función de T si y sólo si T es completo para $\mathcal{P}$.

12. **(Teorema de Basu)** Sea T un estadístico suficiente y completo para una familia $\mathcal{P}$. Si V es un estadístico ancilario (es decir, que su distribución no depende de θ) probar que T y V son independientes.
    Sugerencia: probar que $P(V \in A|T) = P(V \in A)$ para todo evento A.

13. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son completos.

14. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, 1)$.

(a) Mostrar que $T = (X_1, \sum_{i=2}^n X_i)$ es suficiente para μ pero no completo.

(b) Hallar un estadístico completo y un estimador IMVU de μ.

15. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$. Probar que $X_{(n)}$ es completo para θ.

16. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$, con $\theta \in \Theta \subset (0, 1)$.

    (a) Mostrar que si Θ tiene más de n puntos, el estadístico $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es completo.

    (b) Deducir que $\bar{X}$ es IMVU de θ.

    (c) Mostrar que $q(\theta) = \theta/(1-\theta)$ no es estimable mediante un estimador insesgado.

17. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

    (a) Mostrar que si σ^2 es conocido, $\bar{X}$ es IMVU para μ.

    (b) Mostrar que si μ es conocido, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ es IMVU para σ^2.

    (c) Mostrar que si ambos parámetros son desconocidos, entonces $\bar{X}$ es IMVU para μ y s^2 es IMVU para σ^2.

18. En el ejercicio 13 de la Práctica 2, hallar estimadores IMVU para λ, λ^2 y μ.

19. En el ejercicio 14 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para $q(\theta)$.

20. En el ejercicio 15 de la Práctica 2, hallar un estimador IMVU para p.

21. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Hallar un estimador IMVU de θ.

22. Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos m.a. independientes, con distribución $N(\mu, \sigma_1^2)$ y $N(\mu, \sigma_2^2)$ respectivamente. Consideremos el parámetro $\theta = (\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

    (a) Probar que $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum X_i, \sum Y_j, \sum X_i^2, \sum Y_j^2\right)$ es suficiente para θ pero no completo.

    (b) Supongamos que $r = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ es conocido. Probar que

$$T^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i + r\sum_{j=1}^m Y_j, \sum_{i=1}^n X_i^2 + r\sum_{j=1}^m Y_j^2\right)$$

    es completo para θ. Hallar un estimador IMVU de μ.

D) Estadísticos minimales suficientes.

23. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 son minimales.

24. Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ muestras aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y $N(\eta, \tau^2)$ respectivamente. Encontrar estadísticos suficientes minimales para θ cuando:

    (a) $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2)$, si $\mu, \eta \in I\!R$ y $\sigma^2, \tau^2 > 0$.

    (b) $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2)$, si $\mu, \eta \in I\!R$ y $\sigma^2 = \tau^2 > 0$.

    (c) $\theta = (\mu, \sigma^2, \tau^2)$, si $\mu = \eta \in I\!R$ y $\sigma^2, \tau^2 > 0$.

25. Sea X_1 una variable $N(\mu, \sigma_1^2)$ y X_2 con distribución $N(\mu, \sigma_2^2)$ independiente de X_1. Probar que $T = (X_1, X_2, X_1^2, X_2^2)$ es minimal suficiente pero no completo y que no existe un estimador IMVU para μ.

26. Sea $\mathcal{P} = \{N(\theta, \theta^2) : \theta > 0\}$ y $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. con distribución en $\mathcal{P}$. Probar que $T(\mathbf{X}) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$ es suficiente minimal para $\mathcal{P}$.

27. Dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, demostrar que $T(\mathbf{X}) = \left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ es suficiente minimal para θ cuando la muestra tiene distribución:

   (a) $\mathcal{C}(\theta, 1)$, con densidad
$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (x-\theta)^2}$$

   (b) $\mathcal{L}(\theta, 1)$, cuya densidad es
$$f(x;\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\left[1 + e^{-(x-\theta)}\right]^2}$$

E) Desigualdad de Rao–Cramer.

28. Probar que si $f(x;\theta)$ admite derivada segunda respecto de θ y si se puede derivar dentro de la integral, entonces
$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(X;\theta)\right].$$

29. Consideremos una familia $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ y supongamos que se hace una reparametrización $\xi = h(\theta)$ con h biyectiva y derivable. Mostrar que $I(\xi) = I(\theta) / \left[h'(\theta)\right]^2$.

30. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$.

   (a) Calcular el número de información de Fisher $I_1(\theta)$.

   (b) Mostrar que $\bar{X}$ alcanza la cota de Rao–Cramer y deducir que es IMVU para θ.

31. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y sean μ y $\delta^*(T)$ como en el ejercicio 13 de la Práctica 2. Mostrar que aunque $\delta^*(T)$ es un estimador IMVU de μ, la cota de Rao–Cramer es estrictamente menor que $V_\lambda(\hat{\mu})$.

32. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$, con σ_0^2 conocido.

   (a) Mostrar que $\bar{X}$ es un estimador IMVU para μ, usando la desigualdad de Rao–Cramer.

   (b) Mostrar que $\bar{X}^2 - \sigma_0^2/n$ es un estimador IMVU de μ^2, aunque no alcanza la cota de Rao–Cramer.