Repaso de probabilidades

1. Una variable aleatoria X tiene distribución $\Gamma(n,\lambda)$ si sus funciones de densidad y característica son
$$f_X(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\cdot x^{n-1}e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x) \text{ y } \quad \varphi_X(t)=\frac{\lambda^n}{(\lambda-it)^n}.$$
Probar que:
   (a) $E(X)=n/\lambda$ y $V(X)=n/\lambda^2$.
   (b) Si $a>0$, entonces $aX\sim\Gamma(n,\lambda/a)$.
   (c) Si $Y\sim\Gamma(m,\lambda)$ independiente de X, entonces $X+Y\sim\Gamma(n+m,\lambda)$.

2. (a) Si $Z\sim N(0,1)$, probar que $Z^2\sim\Gamma(1/2,1/2)$.
   (Nota: Usar que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.)
   (b) La distribución $\Gamma(n/2,1/2)$, para $n\in\mathbb{N}$, se denomina χ^2_n (chi-cuadrado con n grados de libertad). Probar que si $Z_1,\dots,Z_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0,1)$, entonces $\sum_{i=1}^n Z_i^2\sim\chi^2_n$.

3. Una variable aleatoria X tiene distribución $\beta(r,s)$ si su función de densidad es
$$f_X(x)=\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\cdot x^{r-1}(1-x)^{s-1}I_{[0,1]}(x).$$
Probar que:
   (a) $E(X)=r/(r+s)$ y $V(X)=rs/\left[(r+s)^2(r+s+1)\right]$.
   (b) Analizar el caso en que $r=s=1$.

4. Una variable aleatoria X tiene distribución $\mathcal{C}(0,1)$ si sus funciones de densidad y característica son
$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \varphi_X(t)=e^{-|t|}.$$
   (a) Probar que X no tiene momentos finitos de ningún orden.
   (b) Si $X_1,\dots,X_n$ son independientes y tienen distribución $\mathcal{C}(0,1)$, mostrar que $\bar{X}_n\sim\mathcal{C}(0,1)$. ¿Vale la Ley de los Grandes Números?

5. (a) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Encontrar la función característica de X.
   (b) Si $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ e $Y\sim\mathcal{P}(\mu)$ independientes, demostrar que $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
   (c) Probar que si $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|X=x\sim Bi(x,p)$ entonces $Y\sim\mathcal{P}(\lambda p)$.

6. Sean $\{X_n\}_{n\geq1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq1}$ sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n\to X$ e $Y_n\to Y$ en probabilidad (o c.s., respectivamente). Probar que:
   (a) X_n está acotada en probabilidad en ambos casos. También, si $X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X$, entonces X_n está acotada en probabilidad.
   (b) Si $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es continua, entonces $g(X_n,Y_n)\to g(X,Y)$ en probabilidad o c.s., respectivamente.

7. Sean $\{X_n\}_{n\geq1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq1}$ sucesiones de v.a. tales que X_n está acotada en probabilidad e $Y_n\xrightarrow{\mathcal{D}}0$, demostrar que $X_nY_n\xrightarrow{\mathcal{D}}0$.

8. (a) Probar que si $\sqrt{n}\,(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ entonces $X_n \xrightarrow{p} \mu$

   (b) Deducir la Ley Débil de los Grandes Números a partir del Teorema Central del Límite.

9. (Teorema de Slutsky) Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones de v.a. y a una constante tales que $X_n \xrightarrow{p} a$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que:

   (a) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a + Y$.

   (b) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aY$.

10. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. tales que

$$\sqrt{n}\,(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2\right).$$

Sea $g : I\!R \to I\!R$ tal que g es derivable, g' es continua en μ y $g'(\mu) \neq 0$.

   (a) Demostrar que

$$\sqrt{n}\,(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2 g'(\mu)^2\right).$$

   (b) ¿Cuál sería la distribución asintótica de

$$n\,(g(X_n) - g(\mu))$$

   si $g'(\mu) = 0$ pero g'' es continua en μ y $g''(\mu) \neq 0$?

11. (Desigualdad de Jensen) Sea $\phi : I\!R \to I\!R$ una función convexa. Y sea X una variable aleatoria con esperanza finita probar que

$$E(\phi(X)) \geq \phi(E(X))$$

12. Sea X una variable aleatoria y sea m una mediana de X. Probar que

$$m = \arg\min_{c\in I\!R} E(|X - c|).$$

13. Un vector aleatorio $X \in I\!R^p$ tiene distribución $N_p(\mu, \Sigma)$, si su función de densidad es,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right\}.$$

   (a) Probar que $X_1, \ldots, X_p$ son independientes si y sólo si Σ es diagonal.

   (b) Probar que $\Sigma^{-1/2}(X - \mu) \sim N_p(0, I_p)$.

   (c) Probar que si $Y \sim N_p(0, I_p)$ y $A \in I\!R^{pxp}$ entonces $AY + \mu \sim N_p(\mu, AA')$.

   (d) Si $A \in I\!R^{q\times p}$ con $q \leq p$ e $Y = AX$, entonces $Y \sim N(A\mu, A\Sigma A')$.
   Sugerencia: Considere la función característica del vector aleatorio definada como

$$\phi_X(t) = E(\exp\{i\, t'X\}) = E(\exp\{i \sum_{j=1}^{p} t_j X_j\})$$