

## ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - 2do. cuatrimestre 2014

### Práctica 5 - Subespacios y rango de matrices

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

- (a)  $S \subset \mathbb{R}^2$ ;  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$ .
- (b)  $S \subset \mathbb{R}^2$ ;  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 3\}$ .
- (c)  $S \subset \mathbb{R}^2$ ;  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 0\}$ .
- (d)  $S \subset \mathbb{R}^2$ ;  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$ .
- (e)  $S \subset \mathbb{R}^3$ ;  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$ .
- (f)  $S \subset \mathbb{R}^3$ ;  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 \geq 0\}$ .

2. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Probar que  $S = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v^t = 0\}$ , el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

3. Dibujar los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  y analizar si son subespacios o no:

- (a)  $S = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$ .
- (b)  $S = \{t(1, 2) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$ .
- (c)  $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$ .
- (d)  $S = \{s(1, 2) + t(2, 4) : s, t \in \mathbb{R}\}$ .
- (e)  $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R} \text{ con } s + t = 1\}$ .

4. Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial real y sean  $v_0, v_1$  y  $v_2 \in \mathbb{V}$ .

- (a) Probar que  $S = \{t \cdot v_0 : t \in \mathbb{R}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$ .
- (b) Probar que  $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$ .
- (c) Describir geoméricamente los subespacios  $S$  y  $T$ .

5. Se consideran los vectores  $v_1 = (2, 3)$  y  $v_2 = (1, -1)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Determinar si  $u = (1, 2)$  es combinación lineal de  $v_1$  y  $v_2$ . ¿Qué sucede con  $w = (0, 0)$ ?

6. Analizar si  $v \in S$  o no en cada uno de los siguientes casos:

- (a)  $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$ ;  $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$ .
- (b)  $S = \langle (1, 2, 3), (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$ ;  $v = (-5, -10, -15)$ .
- (c)  $S = \langle (1, -1, 2, 1), (2, 1, 3, 0) \rangle$ ;  $v = (0, -3, 1, 1)$ .

7. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de  $\mathbb{R}^3$  con las condiciones:

- (a) que contenga al vector  $v = (1, 2, 3)$ .
- (b) que contenga al vector  $v = (1, 1, 0)$  y no contenga al vector  $w = (0, 1, 1)$ .

8. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan  $\mathbb{R}^n$  o no:

- (a)  $n = 2$ ,  $\{(1, 1), (1, -1)\}$ .
- (b)  $n = 2$ ,  $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\}$ .
- (c)  $n = 3$ ,  $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}$ .
- (d)  $n = 3$ ,  $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$ .
- (e)  $n = 4$ ,  $\{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$ .

9. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.
- $\{(1, -3, 5), (-2, 2, 1), (-1, -1, 6)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ .
  - $\{(1, 2, 2, -1), (0, 2, -2, -3), (1, 1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ .
  - $\{v\}$  con  $v \in \mathbb{V}$ .
  - $\{v_1, v_2, \dots, v_n, 0\}$  con  $v_1, v_2, \dots, v_n, 0 \in \mathbb{V}$ .
10. Hallar (si es posible) tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
11. Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en  $\mathbb{V}$ :
- $\{(1, -1, 2), (k+1, k, k+6), (k, k+1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ .
  - $\{(k-2, k, 1, 0), (0, k, 0, 0), (1, 1, 0, k-1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ .
12. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del espacio  $\mathbb{V}$ . En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender el conjunto a una base de  $\mathbb{V}$ .
- $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ .
  - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ .
  - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 3)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ .
  - $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ .
  - $\{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^5$ .
13. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:
- $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$ .
  - $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$ .
  - $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle$ .
14. Sea  $S = \langle (0, -1, k), (1, -1, 0), (-1, 0, 2) \rangle$ . Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio  $S$  en función de  $k$ .
15. Dados los subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (2, 3, -1), (-2, 1, 5), (4, 2, -6) \rangle$ :
- Probar que  $T \subset S$ .
  - Calcular  $\dim(S)$ ,  $\dim(T)$  y decidir si vale la igualdad  $T = S$  o no.
16. En cada uno de los siguientes casos, hallar bases de  $S$ ,  $T$ ,  $S \cap T$  y  $S + T$ . ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?
- $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$ ,  
 $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$ .
  - $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 0) \rangle$ .
  - $S = \langle (-1, 2, -1, 2), (1, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 2) \rangle$ ,  
 $T = \langle (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 1, 2, 0) \rangle$ .

17. Para los subespacios  $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$  y  $T = \langle (2, -1, -1, 3), (1, 1, 0, -2), (4, 1, -1, -1) \rangle$ :
- Hallar una base  $\mathcal{B}_1$  del subespacio  $S \cap T$ .
  - Extender la base  $\mathcal{B}_1$  a una base de  $S$ . Hacer lo mismo para una base de  $T$ .
  - Hallar una base  $\mathcal{B}_2$  del subespacio  $S + T$  que contenga una base de  $S$  y una base de  $T$ . Extender  $\mathcal{B}_2$  a una base de  $\mathbb{R}^4$ .
18. Sean  $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$  y  $T = \langle (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, \lambda) \rangle$ .
- Hallar todos los valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que  $S \cap T \neq \{0\}$ .
  - Para cada valor  $\lambda$  hallado en (a), encontrar una base de  $S \cap T$ .
19. Sean  $S$  y  $T$  subespacios de  $\mathbb{R}^6$  tales que  $\dim(S) = 3$  y  $\dim(T) = 4$ .
- Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
    - $S \subset T$ .
    - $\dim(S + T) = 7$ .
    - $\dim(S \cap T) = 4$ .
    - $S \cap T = \{0\}$ .
  - Si  $\dim(S \cap T) = 3$ , ¿qué puede decirse de  $S$  y  $T$ ?
  - Si  $\dim(S + T) = 4$ , ¿qué puede decirse de  $S$  y  $T$ ?
20. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

- hallar una base y la dimensión del espacio fila, del espacio columna y del núcleo.
  - calcular el rango.
  - repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.
21. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
- Si  $m = 7$ ,  $n = 8$  y  $\text{rg}(A) = 2$ , calcular  $\dim(N(A))$ .
  - Si  $m = 6$ ,  $n = 5$  y  $\dim(N(A)) = 3$ , calcular  $\text{rg}(A)$ .
  - Si  $m = 3$ ,  $n = 5$  y  $\dim(E_C(A^t)) = 3$ , calcular  $\text{rg}(A)$  y  $\dim(N(A))$ .

22. Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .

- Hallar una base y la dimensión de  $E_C(A)$ .
  - Calcular  $\dim(N(A))$ ,  $\dim(N(A^t))$ ,  $\dim(E_F(A))$ ,  $\text{rg}(A)$  y  $\text{rg}(A^t)$ .
23. Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  una matriz tal que  $\dim(N(A)) = 1$  y sea  $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ . Determinar el rango de la matriz ampliada  $[A|b] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  para que el sistema  $A \cdot x = b$  tenga solución.

24. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$ .

- Determinar el valor de  $b \in \mathbb{R}$  que hace que  $\text{rg}(A) = 2$ .
- Para el valor de  $b$  hallado, decidir si  $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$  y hallar una base de  $N(A^t)$ .

25. Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k+2 & 1 \\ -1 & k^2-7 & -1 & -2 \\ 1 & k^2-11 & 2k+7 & k-9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hallar **todos** los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$ .  
 (b) Para cada  $k$  hallado, calcular una base de  $N(A)$  y una base de  $N(A^t)$ .

26. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$  y sean  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  y  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dos matrices tales que  $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$ .

Calcular  $\text{rg}(A \cdot B \cdot A)$  y  $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$ , y hallar una base de  $N(A \cdot B \cdot A)$ .

27. Sean  $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  y  $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  tales que  $\text{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$  y  $\dim(E_F(P^t)) = 5$ .

- (a) Calcular  $\dim(N(P))$ ,  $\text{rg}(P)$ ,  $\dim(N(Q))$  y  $\text{rg}(Q)$ .  
 (b) Calcular  $\text{rg}(Q^t \cdot P^{-1})$ .  
 (c) Calcular  $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$ , si  $W \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  es una matriz tal que  $\dim(N(W)) = 3$ .

28. Sean  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $S$  el sistema  $S : \begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ 2ax - y + bz = 0 \end{cases}$ .

Hallar  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que el subespacio  $N(A)$  coincida con el espacio de soluciones de  $S$ .

29. Para cada uno de los siguientes subespacios  $S$ , hallar  $m, n \in \mathbb{N}$ , y  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tales que  $N(A) = S$ .

- (a)  $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0) \rangle$ .  
 (b)  $S = \langle (1, 3, 1, -2), (-2, 1, 0, 3), (-1, 4, 1, 1) \rangle$ .

30. Dados los subespacios de  $\mathbb{R}^4$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha + 2)x_3 + x_4 = 0\}$  y  $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$ :

- (a) Calcular  $\dim(S \cap T)$  en términos del valor  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (b) Para cada  $\alpha$  tal que  $\dim(S \cap T) = 1$ , hallar una base de  $S \cap T$ .  
 (c) Para cada  $\alpha$  tal que  $\dim(S \cap T) = 2$ , hallar una base de  $S + T$ .