RESOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL, 08/10/2014

1) Afirmamos que $\#A = c$. Por un lado, es claro que $A \subset \{X \subset \mathbb{R}^2 : \#(X) = \aleph_0\}$, el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}^2$. Empecemos por probar que este conjunto tiene cardinal menor o igual a c:
Para eso, vamos a probar que $\#\{X \subset \mathbb{R}^2 : \#(X) = \aleph_0\} \leq \#\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2\} = c^{\aleph_0} = c$ (en realidad se puede poner un $=$, pero para resolver este ejercicio nos alcanza con el $\leq$). Notemos que a cada subconjunto numerable B de $\mathbb{R}^2$ (digamos $B = \{b_1, b_2, \dots\}$) podemos asignarle una función $f_B : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ definiendo $f_B(n) = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La función

$$\begin{aligned} \{X \subset \mathbb{R}^2 : \#(X) = \aleph_0\} &\to \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2\} \\ B &\to f_B \end{aligned}$$

es inyectiva, por lo que $\#\{X \subset \mathbb{R}^2 : \#(X) = \aleph_0\} \leq \#\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2\}$.

Tenemos entonces que $\#A \leq c$. Para terminar el ejercicio basta con encontrar c elementos distintos del conjunto A. Podemos considerar, por ejemplo, para cada $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ al conjunto $\mathbb{Q}^2 \cup \{(r, 0)\}$. Es claro que cada uno de estos conjuntos es denso en $\mathbb{R}^2$, numerable y que se trata de c conjuntos distintos.

2) Veamos que $\|\cdot\|$ es una norma en $C([0,1])$. Primero notemos que $x^2|f(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$ y como f es continua en $[0,1]$ entonces es acotada, por lo que $\|f\|$ es finita para toda $f \in C([0,1])$. Pasemos a verificar que cumple con las 3 propiedades de una norma:

- i) $\|f\| = 0 \implies f = 0$: si $\|f\| = 0$ entonces $x^2 f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, lo que implica que $f(x) = 0$ para todo $x \in (0,1]$. Pero como f es continua entonces también tiene que valer $f(0) = 0$.
- ii) $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$: se deduce de la igualdad $\sup_{x\in[0,1]}\{x^2|\lambda f(x)|\} = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]}\{x^2|f(x)|\}$.
- iii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$: es claro que $x^2|f(x)+g(x)| \leq x^2(|f(x)|+|g(x)|) = x^2|f(x)| + x^2|g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}\{x^2|f(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]}\{x^2|g(x)|\}$ y la desigualadad anterior vale para todo $x \in [0,1]$, así que tomando supremo del lado izquierdo obtenemos lo que queremos.

Pasemos ahora a probar que $\|\cdot\|$ **NO** es equivalente a $\|.\|_\infty$: para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la función continua $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Tenemos que $\|f_n\|_\infty = n$ mientras que $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, no puede existir ninguna constante C tal que $\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\|$.

3)

a) $(f(U))^o \subset f(U^o)$ para todo $U \subset X \Longrightarrow f$ continua.
FALSO. La función $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es continua (lo probamos en el ejercicio 3 de la práctica 4) pero, como $\chi_{\mathbb{Q}}(U) \subset \{0,1\}$ para todo $U \subset \mathbb{R}$, se verifica que $(\chi_{\mathbb{Q}}(U))^o = \emptyset$ para todo $U \subset \mathbb{R}$ y trivialmente vale $(\chi_{\mathbb{Q}}(U))^o \subset \chi_{\mathbb{Q}}(U^o)$.

b) $f^{-1}(V^o) \subset (f^{-1}(V))^o$ para todo $V \subset Y \Longrightarrow f$ continua.
VERDADERO. Sea $A \subset Y$ abierto. Entonces, por hipótesis, $f^{-1}(A) = f^{-1}(A^o) \subset (f^{-1}(A))^o$. Como siempre vale que $(f^{-1}(A))^o \subset f^{-1}(A)$ se sigue que tiene que valer la igualdad $f^{-1}(A) = (f^{-1}(A))^o$, de donde deducimos que $f^{-1}(A)$ es abierto para todo conjunto $A \subset Y$ abierto y, por lo tanto, f es continua.

c) f continua $\Longrightarrow (f(U))^o \subset f(U^o)$ para todo $U \subset X$.
FALSO. La proyección $\pi_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua (lo vimos en el ejercicio 19 de la práctica 4). Sin embargo, el conjunto $A = [0,1] \times \{0\}$ verifica $A^o = \emptyset$ y $(\pi_1(A))^o = (0,1)$, por lo que no se cumple la inclusión del enunciado.

d) f continua $\Longrightarrow f^{-1}(V^o) \subset (f^{-1}(V))^o$ para todo $V \subset Y$.
VERDADERO. Sea $V \subset Y$. Entonces, $f^{-1}(V^o) \subset f^{-1}(V)$ y, como f es continua y V^o es abierto, $f^{-1}(V^o)$ también es abierto. Por otro lado, como $(f^{-1}(V))^o$ es el mayor abierto contenido en $f^{-1}(V)$, deducimos que $f^{-1}(V^o) \subset (f^{-1}(V))^o \subset f^{-1}(V)$.

4) Sabemos que las sucesiones convergentes son acotadas, así que es claro que $c \subset \ell_\infty$. Como además vimos en las clases prácticas que $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, para ver que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ es completo, basta probar que c es cerrado en ℓ_∞.

Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset c$ (es decir que, para cada k, $x^k = (x^k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente) y supongamos que $x^k \to y$ con $\|\cdot\|_\infty$. Queremos ver que $y \in c$.

Vamos a probar que y es una sucesión de Cauchy (como $\mathbb{R}$ es completo, esto automáticamente implica que es convergente). Sea entonces $\varepsilon > 0$ y sea k_0 tal que $\|x^{k_0} - y\|_\infty < \varepsilon/3$. Como x^{k_0} es convergente, entonces es de Cauchy y, por lo tanto existe n_0 tal que para todo $n, m > n_0$ vale que $|x^{k_0}_n - x^{k_0}_m| < \varepsilon/3$. Luego, para todo $n, m > n_0$ vale

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &\leq |y_n - x^{k_0}_n| + |x^{k_0}_n - x^{k_0}_m| + |x^{k_0}_m - y_m| \\ &< \|y - x^{k_0}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \|x^{k_0} - y\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Probamos que la sucesión y es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, $y \in c$, de donde deducimos que $c \subset \ell_\infty$ es cerrado con $\|\cdot\|_\infty$ y entonces es completo.

5) Veamos que los conjuntos F_k son cerrados y con interior vacío.

Por un lado $F_k = {f_k}^{-1}(\{0\})$, luego F_k es cerrado por ser preimagen de un cerrado por una función continua (f_k es $\mathcal{C}^1$).

Ahora veamos que $F_k^o = \emptyset$. Supongamos que $x \in F_k^o$. Luego, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq F_k$. Es decir, f_k es constantemente igual a 0 en $B(x,r)$. En particular es constante en una bola abierta de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto el gradiente de f_k se tiene que anular en esa bola. Absurdo, pues teníamos que $\bigtriangledown f_k(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $F_k^o = \emptyset$.

Como $\mathbb{R}^n$ es completo, por el Teorema de Baire, $\mathbb{R}^n$ no se puede escribir como unión numerable de cerrados con interior vacío. Luego $\mathbb{R}^n \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.