Práctica 9: Espacios Normados

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

i) $\overline{S}$ también es un subespacio.

ii) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

Ejercicio 2. Dado un $k-$espacio vectorial E, un subespacio (vectorial) $H \subset E$ se dice un *hiperplano* si existe $x \in E$, $x \neq 0$, tal que $H \oplus \langle x \rangle = E$.

i) Probar que si H es un hiperplano, entonces para todo $y \in E \setminus H$ se tiene que $H \oplus \langle y \rangle = E$.

ii) Probar que H es un hiperplano si y sólo si existe $\phi : E \to k$ lineal, $\phi \neq 0$, tal que $H = \mathrm{Nu}(\phi)$.

iii) Probar que si E es un espacio normado y H es un hiperplano, entonces H es o bien cerrado o bien denso en E.

Ejercicio 3. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

i) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\} \subset \ell_\infty$.

ii) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$.

iii) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1$.

Ejercicio 4. Sean E y F espacios normados, y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

(1) T es continuo en 0;

(2) $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0;

(3) T es continuo;

(4) T es uniformemente continuo;

(5) $\exists M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ (T es *acotado*);

(6) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 5. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos $L(E, F) := \{T : E \to F \ / \ T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(E, F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

i) $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

ii) Si F es de Banach entonces $L(E, F)$ también lo es.

Ejercicio 6. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 \ / \ \|Tx\| \leq M\|x\| \ \text{ para todo } x\}.$$

Ejercicio 7. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Encontrar una cota para su norma.

Ejercicio 8. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\geq 1}/ \ \exists n_0, \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n,$$

está bien definida y es lineal pero no es continua.

Ejercicio 9. Sean $S, T : \ell^1 \to \ell^1$, definidos por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Probar que $S, T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 10. Sea $T : c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$. (Recordar: c es el conjunto de las sucesiones en $\mathbb{R}$ convergentes).

Ejercicio 11. Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

Ejercicio 12. Sea E un espacio normado sobre k ($k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $\phi : E \to k$ un funcional lineal. Probar que ϕ es continuo si y sólo si $\mathrm{Nu}(\phi)$ es cerrado.

Ejercicio 13. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Asumiendo la existencia de una base de E como espacio vectorial, definir una función lineal $\phi : E \to k$ que no sea continua. Deducir que todo espacio normado de dimensión infinita contiene un subespacio (vectorial) propio denso.

Ejercicio 14. Sea E un espacio normado de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo algebraico (es decir, una transformación lineal biyectiva). Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

i) Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.

ii) Probar que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

iii) Probar que si N_1, N_2 son dos normas en E, entonces son equivalentes: esto es, existen constantes $a, b > 0$ tales que $a \cdot N_1(x) \leq N_2(x) \leq b \cdot N_1(x)$ para todo $x \in E$.

iv) Probar que cualquier norma que se defina sobre E lo convierte en un espacio de Banach.

Ejercicio 15. Sea E un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Probar que S es cerrado en E.

Ejercicio 16. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.
Sugerencia: si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.