Práctica 8: Separabilidad

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 2. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;/\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \;/\; n \in \mathbb{N}\}.$$

Probar que (c_0, d) es un espacio métrico separable.

Ejercicio 3. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto denso. Probar que si A es separable, entonces X es separable.

Ejercicio 4. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una *base de abiertos de* X si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "Para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$".

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

i) X es separable

ii) X posee una base numerable de abiertos

iii) Todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

Ejercicio 6. Probar que todo espacio métrico totalmente acotado es separable.

Ejercicio 7. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 8. Sea (X,d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable. Comparar con el ejercicio 10 de la práctica 2.

Ejercicio 9. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X,d) e (Y,d') son separables.

Ejercicio 10. ¿Es el espacio (ℓ_∞, d_∞) separable?

Ejercicio 11. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable. ¿Se puede reemplazar la hipótesis de sobreyectividad por otra más débil manteniendo la conclusión?