

PRÁCTICA 6: CONEXIÓN Y ARCOCONEXIÓN

Ejercicio 1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < |x| < 2\}; \quad \mathbb{N}; \quad [0, 1]; \quad \mathbb{Q}; \quad \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\};$$

$$B(a, \varepsilon) \ (\varepsilon > 0) \text{ en un espacio métrico } (X, d).$$

Ejercicio 2.

- i) Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo. Idem para $A \cap B$ y $A - B$.
- ii) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C . Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.
- iii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - (a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.
 - (b) Si C es conexo, entonces \overline{C} es conexo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

- (1) No existen U, V abiertos en C , no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$;
- (2) No existen \mathcal{U}, \mathcal{V} abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$;
- (3) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C , entonces $A = C$.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea \mathcal{A} una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 6. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 7. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre \mathbb{R} y \mathbb{R}^n .

Ejercicio 8.

- i) Probar que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
- ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.
- iii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

Ejercicio 9. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} y de \mathbb{R}^2

- i) $\arcsin([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$.
- ii) \mathbb{Q} .
- iii) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$.
- iv) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$.

Ejercicio 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que:

- i) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X .
- ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X , entonces $\{(0, 0), (0, 1)\} \subset B$ o $\{(0, 0), (0, 1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados. ¿Son abiertos?

Ejercicio 12. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente desconexos:

- i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2.
- ii) \mathbb{Q} .

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

- i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.
- ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 14. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

- i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.
- ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B(0, 1)$.
- iii) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$.
- iv) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Ejercicio 15. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 16. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

Ejercicio 17. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x , existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff A$ es arcoconexo.
2. Un espacio métrico es localmente (arco)conexo si y sólo si para todo U abierto de X , las componentes (arco)conexas de U son abiertos de X .
3. Si X es localmente (arco)conexo y U es un abierto de X , entonces U también es localmente (arco)conexo.
4. Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.
5. En un espacio métrico localmente arcoconexo, todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

Ejercicio 18. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si para todos $x, y \in C$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in C$.

- i) Probar que la bola abierta $B(x, r)$ es convexa. Deducir que todo espacio normado es localmente arcoconexo.
- ii) Probar que si C es convexo, entonces C° y \overline{C} también lo son.
- iii) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de E , entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ es convexo. Deducir que dado un subconjunto $A \subset E$, existe un único conjunto convexo minimal (respecto de la inclusión) que lo contiene. Este conjunto se llama la *cápsula convexa* de A , y lo notamos $Conv(A)$.
- iv) Probar que si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un subconjunto finito de E , entonces $Conv(A) = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$.