Práctica 5: Continuidad uniforme, completitud, Baire

Continuidad uniforme

Ejercicio 1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\ d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 2.

i) Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$ y

   b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

   entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0,1)$.

Ejercicio 3.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a,b]$ y también en $[b,+\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Ejercicio 5.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 6. Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A,B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Completitud

Ejercicio 7. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 8. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 10. (Teorema de Cantor) Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 11. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 12. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo. En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 13. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Ejercicio 14.

i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada}\}$. Probar que $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, donde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

ii) Probar que $c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{N}} |a_n|$.

iii) Probar que $\ell^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty\}$ es un espacio de Banach con la norma $||(a_n)||_1 = \sum_{n=1}^\infty |a_n|$. ¿Es también un espacio de Banach con la norma $\|(a_n)\|_\infty$?

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

Baire

Ejercicio 16. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 17. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 18. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \Big\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \Big\}.$$

Ejercicio 19.
Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y de interior vacío en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 20. Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^\circ = \emptyset$.

i) Probar que si A es nunca denso, entonces $X - A$ es denso. ¿Vale el recíproco?

ii) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X - A$ es nunca denso.

Ejercicio 21. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

(1) A es nunca denso;

(2) toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subset B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;

(3) A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 22. Sea $Lip[a, b] = \{ f \in C[a, b] / \ \exists k > 0, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \}$. Probar que $Lip[a, b]^\circ = \emptyset$ en $C[a, b]$.