Práctica 3: Espacios Métricos, Nociones topológicas

Espacios métricos

Ejercicio 1. Sea $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) = N(a-b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 2. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).
Nota: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 3. Sea $\ell_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua }\}$. Probar que son espacios métricos:

i) $(C[a,b], d_1)$, con $d_1(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$.

ii) $(C[a,b], d_\infty)$, con $d_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 5. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.

i) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$.

ii) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

Ejercicio 6.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, que ambas dan lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \leq d'(x,y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

ii) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x,y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$
Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

iii) Sea (X,d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que aplicando i) y ii) se le puede dar una métrica a $X^{\mathbb{N}}$.

Ejercicio 7. Sean d_∞ y d_2 las métricas en $\mathbb{R}^n$ definidas por

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \quad , \quad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Mostrar que un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d_2.

Ejercicio 8. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \inf\{d(x,a) \;/\; a \in A\}$. Probar:

i) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$.

ii) $x \in A \implies d_A(x) = 0$.

iii) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

iv) $B_A(r) = \{x \in X \;/\; d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$.

v) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \;/\; d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$.

Ejercicio 9. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \;/\; a \in A \;,\; b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**:

i) $d(A,B) = d(\overline{A}, B)$.

ii) $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

iii) $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

iv) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

Algunas propiedades topológicas

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$.

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(a) $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G\subseteq A}} G$.

(b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$.

(c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$.

(d) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

(e) $(A\cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(a) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A\subseteq F}} F$.

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$.

(c) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(d) $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

(e) $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(f) $x \in \overline{A} \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

i. $(X-A)^\circ = X - \overline{A}$.

ii. $\overline{X-A} = X - A^\circ$.

iii. ¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$; $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

i. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X-A}$.

ii. ∂A es cerrado.

iii. $\partial A = \partial(X-A)$.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \ / \ d(x,a) \le r\}$.

i) Probar que $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a,r)} \subseteq \overline{B}(a,r)$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a,r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a,r)$.

Ejercicio 13. Sean (X,d_1) e (Y,d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X\times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 5. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A\times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

ii) $\overline{A\times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Ejercicio 14. Sea (X,d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

(a) A' es cerrado.

(b) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A' \subseteq B'$.

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(d) $\overline{A} = A \cup A'$.

(e) $(\overline{A})' = A'$.

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 15. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1) \cup \{2\}.$$

Ejercicio 16. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Ejercicio 17. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 18. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iv) I. Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$. Idem con $[0,1]$.

II. Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.

III. ¿Qué conclusión puede obtenerse de estos ejemplos?