1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: ....

N° de libreta: ....

Cálculo Avanzado

Segundo parcial - 03/12/2014

1) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $A \subsetneq X$ conexo. Si C es una componente conexa de $X - A$, probar que $X - C$ es conexo.

2) Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Sean $E \subset X$ precompacto y $K \subset Y$ compacto tales que $d(E, f^{-1}(K)) > 0$. Probar que $d(f(E), K) > 0$.

   (Recordar: $A \subseteq X$ se dice *precompacto* si $\overline{A}$ es compacto).

3) Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $K \subset X$ compacto. Si $f : K \to K$ es una función continua tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para todo $x, y \in K$, probar que

   a) f es inyectiva y $f^{-1} : f(K) \to K$ es continua.
   b) $f(K) = K$. (Sug.: considerar $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ para algún $x_0 \in K - f(K)$).

4) Sean (X, d) un espacio métrico y d' una distancia en X topológicamente equivalente a d. En cada uno de los casos siguientes, analizar si es verdadero o falso que (X, d') cumple la misma propiedad que (X, d), dando una demostración o un contraejemplo según corresponda:

   a) (X, d) es separable.
   b) (X, d) es compacto.
   c) (X, d) es totalmente acotado.

5) Sean $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y sea

$$\begin{aligned} T_a : \ell_2 &\to \ell_2 \\ (x_n) &\to (a_n.x_n) \end{aligned}$$

   Probar que T_a está bien definido, que es un operador lineal y continuo y calcular su norma.

Justifique todas las respuestas