1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: ....

N° de libreta: ....

Cálculo Avanzado

Primer parcial - 08/10/2014

1) Calcular el cardinal del conjunto

$$A = \{X \subset \mathbb{R}^2 : \#(X) = \aleph_0 \text{ y } \overline{X} = \mathbb{R}^2\}.$$

2) Probar que

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \{x^2|f(x)|\}$$

es una norma en $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$.

¿Son $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ equivalentes?

3) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda:

a) $(f(U))^o \subset f(U^o)$ para todo $U \subset X \Longrightarrow f$ continua.

b) $f^{-1}(V^o) \subset (f^{-1}(V))^o$ para todo $V \subset Y \Longrightarrow f$ continua.

c) f continua $\Longrightarrow (f(U))^o \subset f(U^o)$ para todo $U \subset X$.

d) f continua $\Longrightarrow f^{-1}(V^o) \subset (f^{-1}(V))^o$ para todo $V \subset Y$.

4) Sea $c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \,/\, a_n \text{ es convergente}\}$. Probar que $c \subset \ell^\infty$ y es completo con $\|\cdot\|_\infty$.

5) Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\nabla f_k(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $F_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) = 0\}$, probar que $\cup_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \mathbb{R}^n$.

Justifique todas las respuestas