

PRÁCTICA 5: ESPACIOS  $L^p$ 

**Ejercicio 1.** Sean  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida,  $E \in \Sigma$  un conjunto de medida finita y  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ .

1. Probar que  $L^{p_2}(E, d\mu) \subseteq L^{p_1}(E, d\mu)$ .
2. Mostrar que  $\mu(E) < \infty$ , es una condición necesaria para la inclusión.

**Ejercicio 2.** Sean  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $1 \leq r \leq p \leq s < \infty$ . Si  $f \in L^r(X, d\mu) \cap L^s(X, d\mu)$ , entonces  $\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Probar que:

1. Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(X, d\mu)$ , para algún  $p : 1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $f_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ .
2. Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(X, d\mu)$ ,  $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$  en  $L^q(X, d\mu)$ , y  $1/p + 1/q = 1$ , entonces  $f_n g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f g$  en  $L^1(X, d\mu)$ .
3. Si  $\mu(X) < \infty$  y  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^\infty(X)$ , entonces  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(X, d\mu)$ , para todo  $p \geq 1$ .

**Ejercicio 4.** Dadas las funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

probar que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  a.e. y  $f_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , pero  $f_n$  no converge en  $L^p([0, 1])$  para  $p : 1 \leq p \leq \infty$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida,  $(f_n)_{n \geq 1}$  y  $f$  en  $L^p(X, d\mu)$ , para  $p : 1 \leq p < \infty$ . Probar:

1.  $\|f_n - f\|_{L^p(X, d\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|f_n\|_{L^p(X, d\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(X, d\mu)}$ .
2. Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  a.e. sobre  $X$  entonces:

$$\|f_n\|_{L^p(X, d\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(X, d\mu)} \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^p(X, d\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Sug.: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión:  $g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p$ .)

**Ejercicio 6.** Sea  $k : \mathbb{R}^{d+d} \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que existe  $c > 0$  que verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int |k(x, y)| dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int |k(x, y)| dx \leq c.$$

Probar que si  $1 < p < \infty$ , entonces  $K : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$  dada por

$$K(f)(x) = \int k(x, y) f(y) dy$$

está bien definida y es uniformemente continua.

**Ejercicio 7.** Para  $1 \leq p < \infty$  y  $0 < |E| < \infty$ , definimos:

$$N_p[f] = \left( \frac{1}{|E|} \int_E |f|^p \right)^{1/p}.$$

Probar:

1.  $p_1 < p_2 \Rightarrow N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$ .
2.  $N_p[f + g] \leq N_p[f] + N_p[g]$ .
3.  $\frac{1}{|E|} \int_E |fg| \leq N_p[f]N_{p'}[g]$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ .
4.  $\lim_{p \rightarrow \infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que  $0 < |E| < \infty$  y  $f \in L^\infty(E)$  que verifica  $\|f\|_\infty > 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos  $a_n = \int_E |f(x)|^n dx$ . Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = \|f\|_\infty$ .

**Ejercicio 9.** Si  $f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $g_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} g$  puntualmente y  $\|g_n\|_\infty \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , probar que  $f_n g_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f g$  en  $L^p$ .

**Ejercicio 10.** Demuestre la siguiente generalización de la desigualdad de Holder.

Si  $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1/r$ ,  $p_i, r \geq 1$ , entonces

$$\|f_1 \cdots f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}$$

**Ejercicio 11.** Muestre que cuando  $0 < p < 1$ , los entornos  $\{f \in L^p(0, 1) : \|f\|_p < \varepsilon\}$  de 0, no son convexos.

**Ejercicio 12.** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f$  medible tal que para todo  $\alpha > 0$ ,

$$\omega(\alpha) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \alpha\}) \leq c(1 + \alpha)^{-p}.$$

Probar que  $f \in L^r(X, d\mu)$ , si  $0 < r < p$ .

**Ejercicio 13.** Probar que  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $0 < p < \infty$ ), si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) < +\infty.$$

Además existen constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  que no dependen de  $f$  tales que:

$$c_1 \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) \right)^{1/p} \leq \|f\|_p \leq c_2 \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) \right)^{1/p}.$$

**Ejercicio 14.** Sea  $E = [0, 1/2]$ . Probar:

1.  $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(X, d\mu)$ , ( $1 \leq p < \infty$ ), pero  $f \notin L^r(E)$  si  $r > p$ .

2.  $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(X, d\mu)$  para todo  $p : 1 \leq p < \infty$ , pero  $g \notin L^\infty(E)$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $E = [0, \infty)$ . Probar que  $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$  pero  $f \notin L^p(X, d\mu)$  para ningún  $p : 1 \leq p < \infty$ , y  $p \neq 2$ .

**Ejercicio 16.** Dada  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , probar que:

1.  $\left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) + f(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{|h| \rightarrow \infty} 2^{1/p} \|f\|_p$
2.  $\left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) + f(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 2 \|f\|_p$

**Ejercicio 17.**

1. Dadas funciones  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  y  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$  donde  $1/p + 1/p' = 1$ , probar que la convolución  $f * g(x)$  existe y es finita para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Además define una función acotada y uniformemente continua.
2. Dado  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que  $0 < |E| < \infty$ , probar que:

$$E - E = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un conjunto abierto no vacío. (Sug.: considerar  $\chi_E * \chi_{-E}$ .)

**Ejercicio 18.** Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, para cada  $h > 0$  sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x) dx.$$

Si  $f \in L^p$ , probar que:

1.  $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p} \|f\|_p$ .
2.  $f_h \in L^p$  y  $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$ .
3. Para cada  $r \geq p \geq 1$ ,  $\|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p} \|f\|_p$ .
4.  $\|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

**Ejercicio 19.** Sean  $1 < p < \infty$ ,  $1/p + 1/p' = 1$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Probar:

1.  $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx \right|$ .
2. Si  $(f_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión de funciones de  $L^p$  tal que para toda  $g \in L^{p'}$  resulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k g dx = \int_{\mathbb{R}^d} f g dx, \text{ entonces:}$$

$$\|f\|_p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_p.$$

**Ejercicio 20.** Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible y  $p \geq 1$ . Definimos:

$$L_*^p(E) = \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ medible : } \sup_{t>0} t (|\{x \in E : |f(x)| > t\}|)^{1/p} < \infty\}.$$

Probar:

1.  $L^p(E) \subseteq L_*^p(E)$ ,
2. si  $|E| < \infty$  y  $p > 1$ , entonces  $L_*^p(E) \subseteq L^1(E)$ .