Práctica 4: Teorema de Fubini

Ejercicio 1.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.

(b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

Ejercicio 2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es medible.
Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 3. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible y sea $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que si h es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

Ejercicio 4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que $|E_x|_e = |I - E_y|_e = 0$ para todo $(x, y) \in I \times I$. Probar que E no es medible.

Ejercicio 5. $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y no negativa. Definimos

$$O_E(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} :\ 0 \le t < f(x)\}.$$

a) Si f es una función simple entonces $O_E(f)$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^{d+1}$.
b) Si $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión creciente de funciones medibles y no negativas que convergen a f entonces $O_E(f_n) \nearrow O_E(f)$, es decir, $O_E(f_n) \subset O_E(f_{n+1})$ y $\bigcup O_E(f_n) = O_E(f)$.
c) Deducir que $O_E(f)$ es medible.
d)Probar que $\int_E f(x)dx = |O_E(f)|$.

Ejercicio 6. Sean (X_1, Σ_1) y (X_2, Σ_2) dos espacios medibles. Para $i = 1, 2$ sea $P_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ la proyección sobre X_i dada por $P_i(x_1, x_2) = x_i$.
a) Probar que si $E_i \in \Sigma_i$ entonces $P_i^{-1}(E_i) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.
b) Probar que si Σ es una σ-álgebra en $X_1 \times X_2$ tal que $P_i^{-1}(E) \in \Sigma$ para todo $E \in \Sigma_i$, con $i = 1, 2$, entonces $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \Sigma$.

Ejercicio 7. Notemos con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^2$. Probar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $E \in \Sigma$ y sea f una función medible y no negativa definida en E. Probar que el conjunto

$$O_E(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : \ 0 \leq t < f(x)\}$$

es medible en $\Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, probar que $\mu \times m(O_E(f)) = \int_E f d\mu$.

Ejercicio 9. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $E \in \Sigma$ y sea f una función medible no negativa definida sobre E. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = \mu(\{x \in E : f(x) > \alpha\}).$$

La función ω se llama *distribución de f sobre E*. Probar que

(a) $\omega : (0, \infty) \to \overline{\mathrm{R}}$ es una función decreciente.

(b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

(c) $\omega(\alpha-) \geq \mu(\{x \in E : f(x) \geq \alpha\})$.

(d) ω continua en $\alpha \Rightarrow \mu(\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}) = \mu(\{x \in E : f(x) > \alpha\})$.

(e) Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$.

(f) $\int_E f d\mu = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$. (Sug. Usar el ej. 9 y el teorema de Tonelli)

(g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

Ejercicio 10. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$ para todo $t \geq 0$. Consideramos la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x,t) = e^{-xt} f(t)$. Probar que

(a) G es medible

(b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$

Ejercicio 11. Sea $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $k(x,y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x,y) = f(x.y)$ es medible.

Ejercicio 12. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A - x) \cap B|$ es medible y $\int_\mathbb{R} h(x) dx = |A||B|$.

Ejercicio 13. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

Ejercicio 14. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la función $e^{-2\pi i<\xi,x>}f(x)$ es medible e integrable.

Se define la *Transformada de Fourier de* f como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i<\xi,x>}f(x)dx, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Probar que

(i) $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.

(ii) Si $n = 1$, $\hat{f}(\xi) \underset{\|\xi\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, (*Lema de Riemann-Lebesgue*).

(iii) Si $f(x) = f_1(x_1)\dots f_n(x_n)$, donde cada $f_k(x_k) \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1)\dots\hat{f}_n(\xi_n)$.

(iv) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable y tal que $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a, b]$. Se define

$$g(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Ejercicio 16. Sean $F \subseteq [a, b]$ un compacto ($a, b \in \mathbb{R}$) y $\lambda > 0$. Notamos con $d(x, F)$ la distancia a F de un punto $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in [a, b]$, sea

$$M_\lambda(x) := \int_a^b \frac{d(y, F)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}dy.$$

Probar que M_λ es medible e integrable sobre F. Probar además la estimación

$$\int_F M_\lambda(x)dx \leq \frac{2}{\lambda}\left|[a, b] \setminus F\right|.$$

Ejercicio 17. Probar que:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = 1/x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{sen(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.