Práctica 2: Medida en Espacios Abstractos y Funciones Medibles

Ejercicio 1. Probar que la intersección de cualquier colección de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in A\}$ es la σ-álgebra maximal contenida en todas ellas. Nota: esta σ-álgebra se la denota $\cap_{\alpha\in A}\mathcal{F}_\alpha$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra sobre X generada por una familia numerable de conjuntos disjuntos, $\{\Lambda_n\}_n$ que verifica la condición $\cup_n\Lambda_n = X$ (O sea, forman una partición), probar que cada elemento de $\mathcal{F}$ se escribe como unión de una subcolección numerable de Λ_n's.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto no vacío.

1. Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = \mathrm{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar medida de contar o *counting measure*.

2. Dado $x_0 \in X$. Si $E \subset X$, definimos $\delta(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida suele llamarse delta de Dirac.

3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $A \in \Sigma$. Para cada $E \in \Sigma$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en Σ.

4. Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, \ldots, a_n$ constantes positivas. Probar que
$$\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$$
es una medida.

5. Sea (X, Σ) un espacio medible. Sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas en ese espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \Sigma$,
$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$
entonces μ es una medida.

6. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $E \in \Sigma$ definimos
$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$
Probar que μ_0 es una medida. Probar además que cumple la siguiente propiedad: para cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $F \in \Sigma$ contenido en E y de medida finita.

Ejercicio 4. Sean (X, Σ) un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $A, B \in \Sigma \ \wedge \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $A_n \in \Sigma \ (n \in \mathbb{N}) \ \wedge \ A_n \searrow \emptyset \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 5. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

1. Si $Z_1 \in \Sigma, \ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.
2. Si $E_1, E_2 \in \Sigma$ y $\mu(E_1 \vartriangle E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Ejercicio 6. Sea $f : X \to Y$ y sea $\mathcal{F}$ una σ -álgebra de subconjuntos de X, y sea $\mathcal{G} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$. Demuestre que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra.

Ejercicio 7. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida (X, Σ, μ).

1. Si $E, F \in \Sigma$ entonces $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.
2. Supongamos que $X = \mathbb{R}^d$. Si $E \in \Sigma$ entonces $\mu(E) = \mu(E + v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$.
3. Si $(E_j)_{j\geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$
4. Si $(E_j)_{j\geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$

Ejercicio 8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. Notemos con B a la σ–álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Probar:

1. Si f es una función medible en Σ, entonces $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo $B \in \mathrm{B}$.
2. Si $\overline{\mathrm{B}} = \{E = B \cup A, \ B \in \mathrm{B} \ \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathrm{B}}$.

Ejercicio 9. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} \in \Sigma$. ¿Es f medible?
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?

Ejercicio 10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces:

1. Si f es monótona, entonces f es medible Borel.
2. Si f es derivable sobre $\mathbb{R}$, entonces f' es medible Borel.

Ejercicio 11. Si $f:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible Lebesgue, entonces existe $g:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible Lebesgue.

Ejercicio 13.

1. Hallar $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a.e., tal que no existe $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifica: $f = g$ a.e.

2. Hallar $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.

Ejercicio 14. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k\geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E\backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformemente en A.

Ejercicio 15. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \;\text{ y }\; f_n \rightrightarrows f \text{ en } X\backslash A_\epsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

Ejercicio 16. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^d$.

1. Sea $E \subseteq I$ medible Lebesgue. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g\colon I \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$

2. Sea φ una función simple definida sobre I. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g\colon I \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

3. Sea $f\colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue y finita en c.t.p. Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe φ simple tal que
$$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

4. Sea f como en (c). Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe g continua tal que
$$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

Ejercicio 17. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_k)_{k\geq 1} \colon E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$:

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}\right) \leq \alpha/k,$$

entonces $\mu(E) = 0$.

Ejercicio 18. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ con medida de Lebesgue finita y $(f_k)_{k\geq 1} \colon E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Probar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado y $M > 0$:

$$|E \backslash F| < \epsilon \quad \text{ y } \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N} , \quad \forall x \in F.$$

Ejercicio 19. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = n\ \chi_{[1/n,2/n]}(x)$. Probar

1. $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente,
2. para cada $\delta > 0, (f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$,
3. no existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en E^c.

Ejercicio 20.

1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$ un subconjunto de X tal que $\mu(E) < \infty$. Sean $(f_n)_{n\geq 1} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tales que $f_n \to_{n\to\infty} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:
   a) $\mu\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0$,
   b) para cada $i \geq 1, f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow}_{n\to\infty} f$ en E_i.
2. El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde $\mu(A_k) < \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 21. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto $A \in \Sigma$ y finitas en c.t.p.. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Sigma$ y $\mu\left(A \backslash A_n\right) \to_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Ejercicio 22. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Supongamos que $f_k \xrightarrow{\mu} f$ y $g_k \xrightarrow{\mu} g$. Probar:

1. $f_k + g_k \overset{\mu}{\to} f + g$ sobre E.

2. Si μ es finita, entonces $f_k g_k \overset{\mu}{\to} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis de finitud es necesaria.

3. Sea $(f_k/g_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E. Si $\mu(E) < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \overset{\mu}{\to} f/g$.

Ejercicio 23. Sea $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f : [0,1] \to [0,2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$.

1. f es continua y biyectiva. Además f^{-1} es continua.

2. Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.

3. Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.

4. Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.

5. Hallar $h_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.