1 Análisis Multivariado I - Práctica 1

1.1 Álgebra de matrices

1. Probar que $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$ y $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right).$

2. Mostrar que los autovalores no nulos de AB coinciden con los de BA. (Si las matrices son cuadradas, los nulos también coinciden).

3. Sea A una matriz simétrica de $d\times d$.

   (a) Probar que todos sus autovalores son reales. Si llamamos $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_d$ a estos autovalores, mostrar que:

   - $tr\left(A\right)=\sum\limits_{i=1}^{d}\lambda_i$
   - $|A|=\prod\limits_{i=1}^{d}\lambda_i$
   - $|I\pm A|=\prod\limits_{i=1}^{d}\left(1\pm\lambda_i\right)$

   (b) $A\geq 0\Leftrightarrow\lambda_i\geq 0\ \ \forall i.$

   (c) $A>0\Leftrightarrow\lambda_i>0\ \ \forall i.$

   (d) $A\geq 0$ y $|A|\neq 0\Rightarrow A>0.$

   (e) $A>0\Rightarrow A^{-1}>0.$

   (f) $A>0\Leftrightarrow$ existe $R\in\mathbb{R}^{d\times d}$ no singular tal que $A=RR^{\mathrm{T}}\Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B\in\mathbb{R}^{d\times d}$ tal que si $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d)$ con $\lambda_i>0\quad\forall i$ entonces $A=B\Lambda B^{\mathrm{T}}$ (es lo que se denomina *descomposición espectral* de A).

   (g) $A\geq 0$ de rango $r\Leftrightarrow$ existe $R\in\mathbb{R}^{d\times d}$ de rango r tal que $A=RR^{\mathrm{T}}\Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B\in\mathbb{R}^{d\times d}$ tal que si $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d)$ con $\lambda_i\geq 0\ \forall i$ entonces $A=B\Lambda B^{\mathrm{T}}$.

4. Una matriz P de $d\times d$ se dice *de proyección* si es simétrica e idempotente (es decir, $P^2=P$). Probar que:

   (a) $rg\left(P\right)=r\Leftrightarrow\lambda_i=1$ para $i=1,\ldots,r$ y $\lambda_i=0$ para $i=r+1,\ldots,d$. Entonces $P=\sum\limits_{i=1}^{r}\mathbf{t}_i\mathbf{t}_i^{\mathrm{T}}$ para ciertos $\mathbf{t}_i$ ortonormales. ¿Cómo queda la descomposición espectral en este caso?

   (b) $rg\left(P\right)=tr\left(P\right).$

   (c) $I-P$ también es de proyección. ¿Qué rango tiene?¿Sobre qué espacio proyecta?

5. Sea X de $n\times p$ y de rango p. Mostrar que $P=X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}$ es una matriz de proyección. ¿Sobre qué espacio proyecta?

1.2 Esperanza, varianza y covarianza de vectores aleatorios

1. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores aleatorios (no necesariamente de la misma dimensión) probar que:

   (a) $\mathrm{COV}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}) - \mathbb{E}(\mathbf{x})\,\mathbb{E}(\mathbf{y}^{\mathrm{T}})$.

   (b) $\mathrm{COV}(A\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = A\mathrm{COV}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,B^{\mathrm{T}}$.

   (c) Si $\mathbf{a}$ es un vector no aleatorio, $\mathrm{VAR}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathrm{VAR}(\mathbf{x})$.

   (d) $\mathrm{VAR}(A\mathbf{x}) = A\mathrm{VAR}(\mathbf{x})\,A^{\mathrm{T}}$.

2. Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una muestra de vectores aleatorios de dimensión d (m.a.) con dispersión Σ y $\{a_i\}_{1\le i\le n}, \{b_i\}_{1\le i\le n}$ escalares no aleatorios. Mostrar que:

   (a) $\mathrm{VAR}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\Sigma.$

   (b) $\mathrm{COV}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i, \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\mathbf{x}_j\right) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i = 0.$

3. Si $\mathbf{x} \sim (\mu,\Sigma)$ y A es simétrica, probar que $\mathbb{E}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}) = tr\,(A\Sigma) + \mu^{\mathrm{T}}A\mu$.

4. Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una m.a. (μ,Σ). Mostrar que:

   (a) $\mathbb{E}(\bar{\mathbf{x}}) = \mu$ y $\mathrm{VAR}(\bar{\mathbf{x}}) = \Sigma/n$.

   (b) $\mathbb{E}(Q) = (n-1)\,\Sigma, \quad \text{con } Q = \sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$

1.3 Distribución Normal Multivariada

1. (a) Sean $\mathbf{y}_i \sim N_d(\mu_i,\Sigma_i)$ independientes $(1\le i\le n)$ y $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{y}_i \sim N_d\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\Sigma_i\right)$. (Sugerencia: usar la distribución normal univariada).

   (b) Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una m.a. $N_d(\mathbf{0},\Sigma)$. Llamemos $X^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{d\times n}$.

      i. Si $\mathbf{a}$ de $n\times 1$ es un vector no aleatorio, entonces $X^{\mathrm{T}}\mathbf{a} \sim N_d\left(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}\|^2\,\Sigma\right)$.

      ii. Si $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r\}$ es un conjunto de vectores ortogonales no aleatorios, entonces los vectores aleatorios $\mathbf{u}_i = X^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_i$ $(1\le i\le r)$ son independientes.

      iii. Si $\mathbf{b}$ de $d\times 1$ es un vector no aleatorio, entonces $X\mathbf{b} \sim N_n\left(\mathbf{0}, (\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{b})\,I_n\right)$. En particular, $\mathbf{x}^{(j)} \sim N_n(\mathbf{0},\sigma_{jj}I_n)$, con $\Sigma = (\sigma_{ij})$.

Definición: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son i.i.d. $N_1(\mu_i,\sigma^2)$, entonces

$$U = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2(\delta)$$

es decir que la distribución de la variable aleatoria U se denomina χ^2 *no central* con parámetro de centralidad $\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2}{\sigma^2}$.

2. Consideremos $\mathbf{x} \sim N_d(\mu, \Sigma)$.

   (a) Probar que $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mathbf{x} \sim \chi^2_d(\delta)$ con $\delta = \mu^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu$.

   (b) Si B es simétrica de rango k y $B\Sigma$ es idempotente, probar que $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}B\mathbf{x} \sim \chi^2_k(\delta)$ con $\delta = \mu^{\mathrm{T}}B\mu$.

1.4 Distribución Wishart

En los 4 ejercicios siguientes supondremos que $W \sim \mathcal{W}_d(m, \Sigma)$.

1. Probar que $\mathbb{E}(W) = m\Sigma$.

   (a) Si $\mathbf{b}$ de $d \times 1$ es un vector de constantes, $(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}W\mathbf{b}) / (\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{b}) \sim \chi^2_m$.

   (b) En particular, si $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$ el vector canónico j-ésimo, resulta $w_{jj}/\sigma_{jj} \sim \chi^2_m$.

2. Si $C \in \mathbb{R}^{q\times d}$ es una matriz no aleatoria de rango q, entonces $CWC^{\mathrm{T}} \sim \mathcal{W}_q(m, C\Sigma C^{\mathrm{T}})$.

3. Si se parten las matrices W y Σ de la siguiente manera:

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

   con W_{11} y Σ_{11} cuadradas y de la misma dimensión y si $\Sigma_{12} = \mathbf{O}$, entonces W_{11} y W_{22} tienen distribución Wishart y son independientes. Hallar los parámetros correspondientes.

4. Si W_1 y W_2 son independientes y $W_i \sim \mathcal{W}_d(m_i, \Sigma)$, entonces $W_1+W_2 \sim \mathcal{W}_d(m_1 + m_2, \Sigma)$.