Apellido y Nombre:
No. de libreta:

Análisis Armónico

Ejercicios para entregar - 1/12/2014

---

1. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador tal que $\sup_k \|T^k\|_{\mathcal{L}(H)} = \alpha < \infty$ (i.e., T es *power-bounded*). Siga las sugerencias dadas para probar que existe una constante $C = C(\alpha) > 0$ tal que para todo polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$ de grado n se tiene

$$\|p(T)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C \log(n) \|p\|_\infty,$$

donde $\|p\|_\infty = \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{D}\}$.

a) Observar que para todo $x, y \in H$ se tiene

$$\langle p(T)x, y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle p(e^{it})(\sum_{k=0}^{n} e^{-ikt}T^k)x, y\rangle dt$$

b) Inspirarse en la relación anterior y considerar a $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \in H^1(\mathbb{D})$ para factorizarla como producto de funciones adecuadas y obtener así la cota pedida.

2. Sea $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y B_l la bola de centro cero y radio l. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_{B_1}| \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx < C\|f\|_{BMO}.$$

Sugerencia: Observar que $\int_{B_{2^k}} |f(x) - f_{B_{2^k}}| dx < C2^{nk}\|f\|_{BMO}$.

3. a) Probar que $f(x) = \log|x-a|$ está en $BMO(\mathbb{R})$ (Sugerencia: Si $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ observar que dicha función es Lipschitz). Concluir que existe una constante $C = C(k)$ tal que para todo polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$ de grado k se tiene $\| \log|p| \|_{BMO(\mathbb{R})} \leq C$.

b) Suponga que descomponemos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $x = (x_1, x_2)$ con $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ (con $n = n_1 + n_2$). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y tal que existen constantes positivas C_1 y C_2 cumpliendo que para todo $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ se tiene

$$\|f(\cdot, x_2)\|_{BMO(\mathbb{R}^{n_1})} \leq C_1$$
$$\|f(x_1, \cdot)\|_{BMO(\mathbb{R}^{n_2})} \leq C_2.$$

Probar que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y estimar su norma en términos de C_1 y C_2.

c) Sea $p \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio. Mostrar que $f(x_1, \ldots, x_n) := \log|p(x_1, \ldots, x_n)|$ está en $BMO(\mathbb{R}^n)$.

4. Siga los pasos dados para probar el siguiente resultado de interpolación. Sea $1 < p_1 \leq \infty$ y sea T un operador subativido que asigna $H^1(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ en funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existe un constate $A_0 < \infty$ tal que para toda función $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \lambda\}| \leq A_0 \|f\|_{H^1}$$

y tal que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{p_1} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \lambda\}| \leq \left(A_1 \|f\|_{L^{p_1}}\right)^{p_1}.$$

Probar que para todo $1 < p < p_1$ se tiene que $T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ es acotado con norma

$$C A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p_1}}}.$$

con $C = C(n, p, p_1)$

a) Fijado $1 < q < p < p_1 < \infty$ y f sean $\{Q_j\}$ la familia de cubos maximales diádicos tal que $\lambda^q < |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} |f|^q dx$. Escribamos $E_\lambda = \bigcup Q_j$. Notar que $E_\lambda \subset \{M(|f|^q)^{1/q} > \lambda\}$ y que $|f| \leq \lambda$ a.e. en $(E_\lambda)^c$. Escriba a f como la suma de una *función buena*

$$g_\lambda = f\chi_{(E_\lambda)^c} + \sum_j (f_{Q_j})\chi_{Q_j}$$

y una *función mala*

$$b_\lambda = \sum_j b_\lambda^j,$$

donde $b_\lambda^j = (f - f_{Q_j})\chi_{Q_j}$.

b) Muestre que $g_\lambda \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|g_\lambda\|_{L^\infty} \leq 2^{n/q}\lambda,$$
$$\|g_\lambda\|_{L^{p_1}}^{p_1} \leq \int_{\{|f|\leq\lambda\}} |f(x)|^{p_1} dx + 2^{np_1/q}\lambda^{p_1}|E_\lambda| < \infty.$$

c) Mostrar que para $c = 2^{n/q+1}$, $c^{-1}\lambda^{-1}|Q_j|^{-1}b_\lambda^j$ es un $(1,q)$-átomo. Concluya que b_λ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n)$ y cumple

$$\|b_\lambda\|_{H^1} \leq c\lambda \sum_j |Q_j| \leq c\lambda|E_\lambda| < \infty.$$

d) Empiece con

$$\|f\|_{L^p}^p \leq p\gamma \int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{|T(g_\lambda)| > \frac{1}{2}\gamma\lambda\}|d\lambda +$$
$$p\gamma^p \int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{|T(b_\lambda)| > \frac{1}{2}\gamma\lambda\}|d\lambda$$

y use los resultados de las partes previas para obtener que la expresión anterior es a lo sumo $C(n,p,q,p_1)\,\text{máx}(A_1\gamma^{p-p_1}, \gamma^{p-1}A_0)$. Seleccione $\gamma = A_1^{\frac{p_1}{p_1-1}} A_0^{\frac{-1}{p_1-1}}$ para obtener la conclusión requerida.

e) En el caso $p_1 = \infty$ tenemos $|T(g_\lambda)| \leq A_1 2^{n/q}\lambda$ y seleccione $\gamma > 2A_1 2^{n/q}$ para desahacerse de la integral que involucra a g_λ.

Justifique todas sus respuestas.