

PRÁCTICA 7

1. Sea A un dominio íntegro y M un A -módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.
 - a) Si M es libre, entonces es sin torsión.
 - b) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y M es de torsión entonces $\text{Im}(f)$ es de torsión.
 - c) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y M es sin torsión entonces $\text{Im}(f)$ es sin torsión.
 - d) Si N es sin torsión entonces $\text{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.
 - e) Si M es de torsión y N es sin torsión entonces $\text{Hom}_A(M, N) = 0$.
2. Calcular $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (la torsión de \mathbb{R}/\mathbb{Z} como \mathbb{Z} -módulo).
3. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A -módulo. Probar:
 - a) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/\langle a \rangle)[p] \simeq A/\langle p^n \rangle$ donde $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 / p^k | a\}$.
 - b) M es simple $\iff \exists p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/\langle p \rangle$.
 - c) M es un A -módulo sin torsión $\iff \text{Hom}_A(S, M) = 0$ para todo A -módulo simple S .
4. Sean A un dominio íntegro, $v_1, \dots, v_n \in A^n$ y $P \in A^{n \times n}$ la matriz que tiene en la columna i el vector v_i . Probar lo siguiente.
 - (a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(P) \neq 0$.
 - (b) $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera A^n si y sólo si $\det(P) \in \mathcal{U}(A)$.
5. Sean A un anillo, M un A -módulo a izquierda y $S \subseteq M$ un submódulo. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes.
 - (a) S es un sumando directo de M .
 - (b) La inclusión $\iota : S \hookrightarrow M$ es una sección.
 - (c) La proyección al cociente $\pi : M \rightarrow M/S$ es una retracción.
6. Sea $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Probar que $\langle (a_1, \dots, a_n) \rangle$ es un sumando directo de \mathbb{Z}^n si y sólo si $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$.

7. Sea A un dominio principal y sea M un A -módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:
- M es de torsión $\iff \text{Hom}_A(M, A) = 0$.
 - M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff M \simeq A$ o $\exists p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/\langle p^n \rangle$.
8. Sea A un dominio principal y sea M un A -módulo. Probar:
- Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.
 - Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M , entonces $M \simeq A$. Deducir que si G es un grupo abeliano infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, entonces $G \simeq \mathbb{Z}$.
9. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3 , p^4 y p^5 .
10. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.
11.
 - Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G . Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p .
 - Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G .
12. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:
- Todo subgrupo propio de G es cíclico.
 - Todo subgrupo propio de G es de orden primo.
 - G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.
 - G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.
 - Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.
 - Para todo par de subgrupos S y T de G , $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.
 - El orden de todo elemento no nulo de G es primo.
 - G/S es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G .
 - Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.
13. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:
- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.
 - $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

- c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.
- d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.
- e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.
- f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.
14. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:
- a) $G = \langle a, b, c \rangle$; $2a + 3b = 0$; $2a + 4c = 0$
- b) $G = \langle a, b, c \rangle$; $a = 3b$; $a = 3c$
- c) $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = -c$; $3a = 3c - 8b$
- d) $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = b$; $b = 3c$
15. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:
- a) \mathbb{Z}^4/S con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 / m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.
- b) \mathbb{Z}^3/S con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 / m_1 \text{ es par}, m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.
- c) \mathbb{Z}^3/S con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 / m_1 = m_2 + m_3 \text{ es par}, 3|m_3\}$.
16. Sean p , q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n , en cada uno de los siguientes casos:
- a) $n = p^6 q^3 r$.
- b) $n = p^2 q^4 r^5$.
- c) $n = p^3 q^4$.
17. a) Sea G un grupo abeliano de orden n . Probar que si d es un divisor de n , G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d .
- b) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d ?
- c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.
- d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\text{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $\langle x \rangle$ es un sumando directo de G .
18. Caracterizar todos los $\mathbb{Z}[i]$ -módulos de 5, 6, 21 y 65 elementos.

19. Caracterizar los $K[X]$ -módulos de dimensión 1, 2 y 3 sobre K , para $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Comparar.

20. Encontrar los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los $K[X]$ -módulos definidos por las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para cada matriz analizar $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ por separado.