

PRÁCTICA 5

Algunas definiciones.

En esta práctica todos los anillos tienen unidad. Cuando no se aclare otra cosa, A -módulo significará A -módulo a izquierda.

Un A -módulo M se dice *fiel* si $aM = 0, a \in A \implies a = 0$.

Si A es un anillo, un *sistema de representantes de los A -módulos simples* es un conjunto de A -módulos simples \mathcal{S}_A tal que todo A -módulo simple es isomorfo a exactamente un elemento de \mathcal{S}_A .

Ejercicios

1. Determinar en cada uno de los siguientes casos si la acción \cdot de A sobre M define en M una estructura de A -módulo a izquierda.
 - a) $A = \mathbb{R}, M = \mathbb{C}, a \cdot m = am$.
 - b) $A = \mathbb{R}, M = \mathbb{R}^n, a \cdot m = am, (n \in \mathbb{N})$.
 - c) $A = M_n(\mathbb{R}), M = \mathbb{R}^n, a \cdot m = am, (n \in \mathbb{N})$.
 - d) $A = M_n(\mathbb{R}), M = \mathbb{R}, a \cdot m = \det(a)m, (n \in \mathbb{N})$.
 - e) $A = \mathbb{R}[X], M = \mathbb{R}^n, a \cdot (m_1, m_2, \dots, m_n) = (a(1)m_1, a(2)m_2, \dots, a(n)m_n), (n \in \mathbb{N})$.
 - f) $A = \mathbb{Z}_{nk}, M = \mathbb{Z}_n, a \cdot m = r_n(am), (n, k \in \mathbb{N})$.
2. Decidir cuáles de los A -módulos del ejercicio anterior son fieles.
3. Sean A y B anillos, M un B -módulo y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot m = \varphi(a) \cdot m$ define sobre M una estructura de A -módulo, que denotamos φ^*M .
4. Determinar en cada uno de los siguientes casos si S es un submódulo del A -módulo M .
 - a) $A = \mathbb{R}, M = \mathbb{C}, S = \mathbb{R}i$.
 - b) $A = \mathbb{Z}, M = M_n(\mathbb{Z}), S = \{(a_{ij}) \in M \mid \det(a_{ij}) = 0\}, (n \in \mathbb{N})$.
 - c) A un anillo cualquiera, $M = A^n, S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}, (n \in \mathbb{N})$.
 - d) $A = \mathbb{Z}[X], M = \mathbb{Z}[X], S = \{f \in M \mid f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\}$.
5. Sean M un A -módulo, S un subconjunto de M y N un submódulo de M . Probar que $(N : S) = \{a \in A \mid as \in N \forall s \in S\}$ es un ideal a izquierda de A .
6. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en el \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z} un sistema de generadores minimal con n elementos.
7. Sean $n, m \in \mathbb{N}, 2 < n < m$. Probar en cada uno de los siguientes casos que f es un morfismo de A -módulos.

- a) $A = \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$.
- b) $A = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$
- c) A un anillo cualquiera, $f : A^n \rightarrow A^m$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$.
- d) A un anillo cualquiera, $f : A^m \rightarrow A^n$, $f(a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_n)$.
- e) A un anillo cualquiera, $f : A^n \rightarrow A^2$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + a_n, a_n)$.
- f) A un anillo cualquiera, $f : A^n \rightarrow A^n$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n)$.
- g) A un anillo cualquiera, fijo $a_0 \in A$, $f : A[X] \rightarrow A$, $f(g) = g(a_0)$.
8. En cada uno de los ítems del ejercicio anterior, hallar el núcleo, la imagen y determinar si f es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción y/o isomorfismo.
9. Sean V y W dos \mathbb{Q} -módulos y $f : V \rightarrow W$ una función. Probar que f es un morfismo de \mathbb{Q} -módulos si y sólo si es un morfismo de grupos.
10. Sean M y N dos A -módulos a izquierda. Probar lo siguiente.
- (a) $\text{Hom}_A(M, N)$ tiene estructura de $\mathcal{Z}(A)$ -módulo a izquierda vía: $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)$.
- (b) $\text{Hom}_A(A, N) \simeq N$ como $\mathcal{Z}(A)$ -módulos.
- (c) Si además M es un *bimódulo* - es decir M es también un A -módulo a derecha y $(am)b = a(mb)$, $(a, b \in A, m \in M)$ - entonces $\text{Hom}_A(M, N)$ tiene estructura de A -módulo a izquierda mediante la acción $(a * f)(m) = f(ma)$.
- (d) Observar que A es un A -bimódulo y probar que la acción de A en $\text{Hom}_A(A, N)$ mediante $*$ extiende a la acción de $\mathcal{Z}(A)$ del ítem (a).
- (e) $\text{Hom}_A(A, N) \simeq N$ como A -módulos.
11. Caracterizar en cada uno de los siguientes casos el A -módulo cociente M/S .
- a) $M = A^n$, $S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$.
- b) $M = A[X]$, $S = \{f \in M \mid f(1) = 0\}$.
- c) $M = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij}) \in M \mid a_{i1} = 0 \forall 1 \leq i \leq n\}$.
12. Sean M, N A -módulos y $f : M \rightarrow N$ una función. Probar que f es un morfismo si y sólo si el *gráfico de f* , $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ es un submódulo de $M \oplus N$.
13. Sea k un cuerpo. Una k -álgebra es un anillo A junto con un morfismo de anillos $\iota : k \rightarrow \mathcal{Z}(A)$. Probar lo siguiente.
- a) Si A es una k -álgebra, la fórmula $\lambda \cdot a := \iota(\lambda)a$, $(\lambda \in k, a \in A)$ define en A una estructura de k -espacio vectorial con la propiedad: $(\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b)$, $(\lambda \in k, a, b \in A)$.
- b) Si A es un anillo con una estructura de k -espacio vectorial que verifica la propiedad del ítem anterior, entonces A es una k -álgebra vía el morfismo $\iota : k \rightarrow \mathcal{Z}(A)$, $\iota(\lambda) := \lambda \cdot 1$.

- c) Si A es una k -álgebra y M es un módulo entonces el producto: $\lambda * m := \iota(\lambda)m$ define en M una estructura de k -espacio vectorial. Más aún, para esta estructura se tiene que la imagen del morfismo canónico $\rho : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}M$, $a \mapsto (m \mapsto am)$ está contenida en el subanillo $\text{End}_k M \subset \text{End}_{\mathbb{Z}}M$.
- d) Sea M un grupo abeliano. Probar que es lo mismo darle una estructura de A -módulo a M que darle una estructura de k -espacio vectorial y dar un morfismo de anillos $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(M)$ que además es k -lineal.
14. Sean A y B k -álgebras. Un *morfismo de k -álgebras* $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos que es también una transformación k -lineal. Probar lo siguiente.
- a) Las aplicaciones ι y ρ del ejercicio anterior son morfismos de k -álgebras.
- b) Sea $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(A)$ el morfismo de k -álgebras que le corresponde al A -módulo A via la correspondencia dada más arriba. Probar que ρ es inyectivo. Concluir que toda k -álgebra de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de $M_n(k)$ para algún $n \leq \dim_k A$.
15. Sea M un A -módulo.
- a) Probar que si $f \in \text{End}_A(M)$ verifica $f^2 = f$, entonces $M = \ker f \oplus \text{im } f$.
- b) Probar que si M_1 y M_2 son submódulos de M tales que $M = M_1 \oplus M_2$, entonces existe $f \in \text{End}_A(M)$ tal que $f^2 = f$, $M_1 = \ker f$ y $M_2 = \text{im } f$.
16. Para cada uno de los siguientes anillos A , hallar todos los ideales a izquierda maximales. Dar también una lista completa de representantes de los A -módulos a izquierda simples.
- (a) $A = \mathbb{Z}$. (b) $A = \mathbb{C}[x]$. (c) $A = \mathbb{R}[x]$.
- (d) $A = M_n(k)$, con k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$.
- (e) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in k \right\} \subset M_2(k)$, con k un cuerpo.
- (f) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b, c \in k \right\} \subset M_2(k)$, con k un cuerpo.
17. Decidir cuáles de los anillos del ejercicio anterior son semisimples.
18. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es \mathbb{Z}_n un anillo semisimple?
19. Caracterizar los anillos semisimples A que poseen un solo ideal maximal.
20. Sea k un cuerpo y $f : M_n(k) \rightarrow M_m(k)$ un morfismo de k -álgebras ($n, m \in \mathbb{N}$). Probar que n divide a m .
21. Sea A un anillo conmutativo. Probar que A es semisimple si y sólo si es isomorfo a un producto directo de un número finito de cuerpos.

22. Sea k un cuerpo y $A := k^{\mathbb{N}}$ con la estructura de producto de anillos. Probar que A no es un anillo semisimple. Probar también que todo ideal principal de A es un sumando directo.
23. Sea \mathcal{H} el grupo de los cuaterniones. Dar una lista completa de representantes de los módulos simples a izquierda del anillo $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$.
24. Probar lo siguiente.
- Si A y B son anillos y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(A \times B) \simeq M_n(A) \times M_n(B)$.
 - Si A es un anillo $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(M_m(A)) \simeq M_{nm}(A)$.
 - Si A es un anillo semisimple y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(A)$ es un anillo semisimple.
25. Sean A_1, A_2 anillos y $\pi_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$ ($i = 1, 2$) las proyecciones canónicas. Vía estos morfismos, todo A_i -módulo M adquiere una estructura de $A_1 \times A_2$ -módulo $\pi_i^* M$ (cf. Ejercicio 3). Probar lo siguiente.
- Si M es un $A_1 \times A_2$ módulo, entonces existen A_i -módulos M_i ($i = 1, 2$) tales que $M = \pi_1^* M_1 \oplus \pi_2^* M_2$.
 - Si \mathcal{S}_i es un sistema de representantes de A_i -módulos simples ($i = 1, 2$), entonces

$$\{\pi_1^*(M) : M \in \mathcal{S}_1\} \cup \{\pi_2^*(M) : M \in \mathcal{S}_2\}$$
 es un sistema completo de representantes de $A_1 \times A_2$ -módulos simples.
26. Sea k un cuerpo. Caracterizar los polinomios $p \in k[X]$ tales que $A = k[X]/\langle p \rangle$ es un anillo semisimple.
27. Sea $A \subset M_n(\mathbb{C})$ una subálgebra. Decimos que A es una C^* -álgebra si $a^* := \bar{a}^t \in A$ ($\forall a \in A$). Un C^* -módulo sobre A es un módulo (y por lo tanto un \mathbb{C} -espacio vectorial) V con un producto interno hermitiano \langle, \rangle tal que $\langle av, w \rangle = \langle v, a^* w \rangle \quad \forall v, w \in V, a \in A$.
- Sea A una C^* álgebra. Probar lo siguiente.
- Todo C^* -módulo de A es semisimple como A -módulo.
 - La aplicación $\langle, \rangle : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$, $\langle a, b \rangle = \text{Tr}(ab^*)$ es un producto interno hermitiano y hace que A , con su estructura usual de A -módulo a izquierda, sea un C^* -módulo.
 - A es un anillo semisimple.
28. Demostrar que si $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal autoadjunta (con el producto interno canónico en \mathbb{C}^n), entonces T es diagonalizable. (*Sugerencia:* utilizar los ejercicios anteriores.)
- 29.
- Sea D un anillo de división. ¿Cómo son todos los ideales a izquierda de $M_n(D)$?
 - Sea D un anillo de división. Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(D)$ está generado por un elemento idempotente.
 - Sea A un anillo semisimple. Probar que todo ideal a izquierda de A está generado por un elemento idempotente.