Práctica 4

Algunas definiciones.

En esta práctica todos los anillos tienen unidad. Sea A un anillo. El *centro* de A es el subconjunto

$$\mathcal{Z}(A) := \{a \in A \,|\, ax = xa, \text{ para todo } x \in A\}.$$

Un elemento $a \in A \setminus \{0\}$ se dice un *divisor de cero a izquierda* si existe $b \in A \setminus \{0\}$ tal que $ab = 0$. Los divisores de cero a derecha se definen en forma análoga. A se dice un *dominio íntegro* si es conmutativo y no tiene divisores de cero.

Ejercicios

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar en cada uno de los siguientes casos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo.

   a) $M_n(\mathbb{R})$ con la suma y el producto de matrices.

   b) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y con la suma y el producto de números complejos.

   c) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ con X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de X y $\triangle$ la diferencia simétrica.

   d) $(End(G), +, \circ)$ con G grupo abeliano.

   e) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z},\ a_g \neq 0, \text{ sólo para finitos } g \in G\}$ con G grupo y

   $$\big(\sum a_g \cdot g\big) + \big(\sum b_g \cdot g\big) = \sum (a_g + b_g) \cdot g\,; \quad \big(\sum a_g \cdot g\big) \cdot \big(\sum b_g \cdot g\big) = \sum \big(\sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2}\big) \cdot g.$$

2. Decidir cuáles de los anillos del ejercicio anterior son conmutativos, dominios íntegros, anillos de división o cuerpos.

3. Dar ejemplos de un anillo que no sea dominio íntegro y de un dominio íntegro que no sea anillo de división.

4. Hallar los divisores de cero y las unidades del anillo $A = \mathcal{C}[0,1]$ de funciones continuas definidas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

5. Sea A un anillo. El *grupo de unidades* de A es el conjunto

   $$\mathcal{U}(A) = \{u \in A : u \text{ es inversible }\}.$$

   - Probar que la multiplicación de A hace de $\mathcal{U}(A)$ un grupo.
   - Probar que $\mathcal{U}_n := \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{m \in \mathbb{Z}_n : \mathrm{mcd}(m, n) = 1\}$. Deducir que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo si y sólo si n es primo.
   - Sea G un grupo. Probar que $1 \cdot G \subset \mathcal{U}(\mathbb{Z}[G])$. Mostrar que no vale la igualdad.

6. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[X]$.

7. Si A, B son anillos, denotamos $Hom(A, B)$ al conjunto de morfismos $A \to B$.

   Probar que si A es un anillo y G un grupo, la aplicación,

$$Hom(\mathbb{Z}[G], A) \to Hom(G, \mathcal{U}(A))$$
$$f \mapsto f|G,$$

   es una biyección.

8. Sea $x \in A$ un elemento nilpotente. Probar que $1 + x$ y $1 - x$ son unidades.

9. Sea A un dominio íntegro finito. Probar que A es un cuerpo.

10. En cada uno de los siguientes casos, decidir si B es un subanillo de A:

    a) $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Q}$.
    b) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$.
    c) $A = \mathbb{C}$ y $B = \mathbb{Z}[i]$.
    d) $A = \mathbb{Z}[X]$ y $B = \{f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A \mid a_1 = 0\}$.

11. Sea B un subanillo de un anillo A. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) A dominio íntegro $\Rightarrow$ B dominio íntegro.
    b) B dominio íntegro $\Rightarrow$ A dominio íntegro.
    c) A cuerpo $\Rightarrow$ B cuerpo.
    d) B cuerpo $\Rightarrow$ A cuerpo.

12. Sean K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Probar lo siguiente.

    - Sean $V \subseteq K^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(K)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V. Probar que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(K)$.
    - Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(K)$ es de la forma del definido en el ítem anterior. (Sugerencia: tomar V como el conjunto formado por todas las filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio).

13. Sean B un anillo y J un ideal bilátero de B.

    a) Probar que $M_n(J) = \{A \in M_n(B) : A_{ij} \in J \quad \forall i, j\}$ es un ideal bilátero de $M_n(B)$.
    b) Probar que todo ideal bilátero de $M_n(B)$ es de la forma $M_n(J)$ para algún ideal bilátero J de B. Concluir que si K es un cuerpo, $M_n(K)$ es *simple* (i.e., no tiene ideales biláteros no triviales).

14. Sea B un anillo. Probar que $\mathcal{Z}(M_n(B)) = \mathcal{Z}(B).\mathrm{Id}$.

15. Hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}[X]$.

16. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\langle a, b\rangle = \langle \mathrm{mcd}(a, b)\rangle$.

17. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.

    a) Probar que si $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, entonces $a = a'$ y $b = b'$.

    b) Probar que si d es impar, $\{a + b\sqrt{d} \mid a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 2)\}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

18. Hallar un ideal de $\mathbb{Z}[X]$ que no pueda generarse por un único elemento.

19. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

20. Sea $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, decidir si f es un morfismo de anillos:

    a) $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z},\ f(g) = g(1)$.

    b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \overline{z}$.

    c) $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f(C) = \det(C)$.

    d) $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p,\ f(m) = m^p$, con p un número primo.

21. Determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

    a) Todo morfismo de anillos no nulo que sale de un anillo de división es inyectivo.

    b) Si A es un anillo conmutativo tal que todo morfismo de anillos no nulo que sale de A es inyectivo, entonces A es un cuerpo.

    c) Si A es un anillo tal que todo morfismo no nulo que sale de A es inyectivo, entonces A es un anillo de división.

22. Probar que el único morfismo de anillos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad.

23. Hallar todos los morfismos de anillos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

24. Probar que $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1\rangle$ y $\mathbb{R}[X, Y]/\langle XY\rangle$ no son cuerpos.

25. Hallar los divisores de cero y las unidades de $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3\rangle$.

26. Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar isomorfismos entre los siguientes anillos.

    a) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i\rangle$ y $\mathbb{Z}_5$.

    b) $\mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle Y - X^5, Z - Y^5\rangle$ y $\mathbb{R}[X]$.

    c) $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X\rangle$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$.

    d) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^n - 1\rangle$ y $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$.

27. Sea $L_n = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}/I$, donde $I =< \alpha_i^* \alpha_j - \delta_{i,j}, \sum_i \alpha_i \alpha_i^* - 1 >$.

a) Probar que $L_n \neq 0$.

b) Sea L_n^{op} el anillo opuesto (i.e. el mismo grupo abeliano con producto $x \cdot_{op} y = yx$). Probar que existe un único isomorfismo $L_n \to L_n^{op}$, que manda $\alpha_i \mapsto \alpha_i^*$ y $\alpha_i^* \mapsto \alpha_i$.

c) Sea $x \mapsto x^*$ el isomorfismo del ítem anterior. Probar que $x^{**} = x$.

d) Sea $u \in L_n$ tal que $u^* u = u u^* = 1$. Probar que hay un único ϕ_u endomorfismo de L_n tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*, (x \in L_n)$ y tal que $\phi(\alpha_j) = u\alpha_j, (j = 1, \ldots, n)$.

e) Probar que $u = \sum_j \phi_u(\alpha_j)\alpha_j^*$.

f) Probar que si ϕ es un endomorfismo de L_n tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*, (x \in L_n)$ entonces existe $u \in L_n$ tal que $u^* u = u u^* = 1$ y tal que $\phi = \phi_u$.