Práctica 3

1. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \rtimes K$.
   (a) Probar que si $K \triangleleft G$ entonces $kh = hk$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$.
   (b) Deducir que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.
2. Sea $n \geq 3$. Para $G = \mathbb{D}_n, \mathbb{S}_n$, descomponer G como producto semidirecto $G \cong H \rtimes_\phi K$ con K cíclico no trivial.
3. ¿Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto no trivial?
4. Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de H y K en cada uno de los siguientes casos.
   (a) $G = \mathbb{C}^\times, \quad H = S^1$
   (b) $G = G_{12}, \quad H = G_3$
   (c) $G = G_{12}, \quad H = G_2$
   (d) $G = \mathbb{C}, \quad H = \mathbb{R}$
   (e) $G = GL(n, \mathbb{C}), \quad H = SL(n, \mathbb{C})$
   (f) $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$
5. Sean $H = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Z}_4$.
   (a) Describir todos los productos semidirectos $G = H \rtimes_\varphi K$.
   (b) Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a $\mathbb{A}_4$.
6. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X. En cada caso calcular ${}^G X$, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X
   (a) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$
   (b) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^\times$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$
   (c) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
7. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.
8. Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.
9. Sea G un grupo.
   (a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$.
   (b) Probar que si $G/\mathcal{Z}(\mathcal{G})$ es cíclico entonces G es abeliano.
   (c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.
   (d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.
   (e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/\mathcal{Z}(G)$ sea abeliano.
10. Sea p un primo.
    (a) Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{Z}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.

(b) Calcular $[G, G]$ con $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

11. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

12. Sea p primo y $|G| = n$. Entonces existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G$, $ord(x) = p^s$ para algún s. (s depende de x)

13. Calcular todos los p-subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_{12}\,, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}\,, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3\,, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3.$$

14. Sean p, q primos, $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

15. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540.

16. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar

    (a) $H_p H_q$ es subgrupo de G.

    (b) $H_p H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.