NOTAS DE ÁLGEBRA I

AUTOR: ARIEL PACETTI. RETOQUES: MATÍAS GRAÑA

1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.1. Conjuntos.

Definición. Un *conjunto* $\mathcal{A}$ es una colección de objetos tales que, dado un objeto cualquiera v, se puede determinar si v pertenece a $\mathcal{A}$ o no.

Ejemplos. Algunos ejemplos fáciles de conjuntos:

1. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.
2. $\mathcal{A} = \{\bigcirc, \triangle, \square\}$.
3. $\mathcal{A} = \emptyset = \{\}$ es el conjunto vacío, que no tiene ningún elemento.
4. $\mathcal{A} = \{$números enteros$\}$.

Si $\mathcal{A}$ es un conjunto y v es un elemento cualquiera, notamos $v \in \mathcal{A}$ si v pertenece al conjunto $\mathcal{A}$ y $v \notin \mathcal{A}$ si el elemento v no pertenece al conjunto $\mathcal{A}$.

Definición. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos conjuntos cualesquiera, decimos que $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$ o que $\mathcal{A}$ está contenido, o incluido, en $\mathcal{B}$ (y escribimos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) si todo elemento $v \in \mathcal{A}$ satisface que $v \in \mathcal{B}$.

Muchas veces es útil tener en claro qué quiere decir que un conjunto **no** esté incluido en otro. Lo contrario de *"todo elemento de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{B}$"* es *"existe al menos un elemento en $\mathcal{A}$ que no está en $\mathcal{B}$"*. Esto es, para probar que $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{A}$, es necesario encontrar (o probar que existe) un elemento $x \in \mathcal{A}$ tal que $x \notin \mathcal{B}$.

Ejercicios. Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones y en caso afirmativo demostrarlas:

1. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$.
2. $\{1, 2, 3\} \subset \{\{1\}, 2, 3, 4\}$.
3. $\emptyset \subset \{1, \{1\}\}$.

¿Cómo podemos explicitar un conjunto $\mathcal{A}$? Hasta aquí conocemos una única manera: listando todos sus elementos. ¿Cómo podemos explicitar un conjunto de otra manera? La respuesta es *por comprensión*. Esto es, dando alguna propiedad que cumplen los elementos que están en el conjunto y no cumplen los elementos que no están en el conjunto. Un primer ejemplo (que presenta problemas) es $\mathcal{B} = \{n : n \text{ es par}\}$. Este ejemplo tiene el problema de que no se dice qué números se consideran. Todos entendemos que $2 \in \mathcal{B}$. Pero ¿$-2 \in \mathcal{B}$? Cuando se escribe n en la definición de $\mathcal{B}$, se consideran también números negativos? ¿Y otro tipo de números? La solución a este problema es decir precisamente a qué tipo de elementos nos referimos cuando decimos "n es par". La forma correcta entonces de definir este conjunto es $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$ (si es que queremos trabajar solo con números positivos), o $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$ (si es que queremos trabajar también con números negativos).

Un ejemplo clásico que muestra la necesidad de especificar el conjunto de los objetos sobre los que miramos la propiedad es la paradoja de Russell y Zermelo (1901), sea $\mathcal{A} = \{\mathcal{B} \,:\, \mathcal{B} \notin \mathcal{B}\}$. ¿Es cierto que $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$?

Ejemplos de conjuntos definidos por comprensión son

- $\mathcal{A} = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 < 2\big\}$.
- $\mathcal{A} = \big\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 < 2\big\}$.
- $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ es primo}\}$.
- $\mathcal{A} = \{n + 1 \,:\, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \text{ es primo}\} = \{n \in \mathbb{Z} \,:\, n - 1 \text{ es primo}\}$.

Definición. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos conjuntos, decimos que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si tienen exactamente los mismos elementos. En otras palabras, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Al trabajar con conjuntos, uno quiere poder definir ciertas *operaciones* entre ellos. Los ejemplos básicos de operaciones de conjuntos son:

- La *unión* (notada $\cup$): dados conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto $\mathcal{A}$ o están en el conjunto $\mathcal{B}$. Recordemos que *"o"* en matemática significa que es verdadera *al menos* una de las dos afirmaciones.
- La *intersección* (notada $\cap$): dados conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es el conjunto formado por los elementos que están en $\mathcal{A}$ y están en $\mathcal{B}$.
- La *diferencia* (notada $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ ó $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$): son los elementos que están en $\mathcal{A}$ y que no están en $\mathcal{B}$.

Ejemplos. Tomemos los conjuntos:

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 8, -1\}$, $\mathcal{B} = \{\{1\}, 2, 10, 15\}$. Entonces
$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{1, 2, 8, -1, \{1\}, 10, 15\}, \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{2\},$$
$$\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{1, 8, -1\}, \quad \mathcal{B} - \mathcal{A} = \{\{1\}, 10, 15\}.$$
- $\mathcal{A} = \{\text{enteros pares}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{enteros impares}\}$. Entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A}$ y $\mathcal{B} - \mathcal{A} = \mathcal{B}$.
- $\mathcal{A}$ un conjunto cualquiera y $\mathcal{B} = \emptyset$. Entonces $\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$, $\mathcal{A} - \emptyset = \mathcal{A}$ y $\emptyset - \mathcal{A} = \emptyset$.
- Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ¿cómo son $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$?

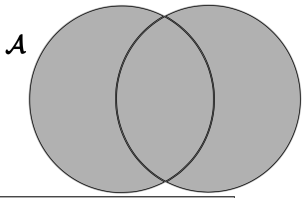
Definición. Dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen disjuntos si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$; Es decir, si no tienen elementos en común. ¿Cómo son $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son disjuntos?

Un procedimiento usual es trabajar dentro de un conjunto *referencial* V. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subconjuntos de V, entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ están también dentro de V. La existencia de un conjunto referencial permite hablar de *complementos*:

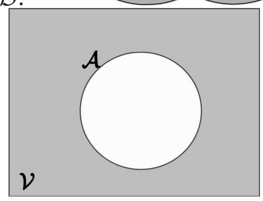
Definición. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de un conjunto referencial V, el *complemento* de $\mathcal{A}$ (notado $\mathcal{A}^c$) es el conjunto de los elementos de V que no están en $\mathcal{A}$, o sea $\mathcal{A}^c = V - \mathcal{A}$.

Ejemplo. Consideremos el conjunto $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $\mathcal{A} = \{1, 9, 5, 3\}$. Entonces, $\mathcal{A}^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 10\}$. Si miramos el conjunto $(\mathcal{A}^c)^c = \{1, 3, 5, 9\} = \mathcal{A}$, ¿será esto siempre cierto? O sea, si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de un conjunto referencial V, ¿es cierto que $(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A}$?

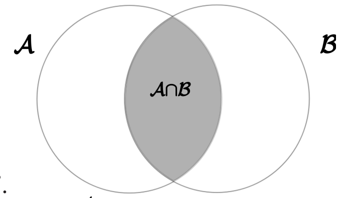
Aquí surge el siguiente problema: ¿cómo podemos probar una igualdad entre dos conjuntos cualesquiera? Una herramienta muy útil (para probar igualdades entre pocos conjuntos) es considerar los *diagramas de Venn*[1] . Un diagrama de Venn es una manera gráfica de representar conjuntos y elementos en estos conjuntos, por ejemplo:



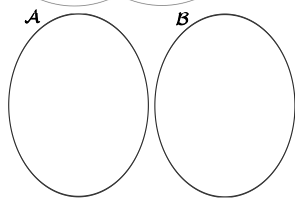
1. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.



2. $\mathcal{A}^c$.



3. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.



4. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Veamos el diagrama de Venn de la siguiente situación: tomamos el conjunto de alumnos que ingresaron en la facultad de ciencias exactas en el año 2008. De los 550 alumnos que entraron, 300 cursan Análisis I y Álgebra I, 150 cursan Análisis I y Física I, 20 cursan las 3 materias, 30 cursan sólo Álgebra I, 25 cursan sólo Análisis I, 15 cursan sólo Física I y 10 no cursan ninguna de estas materias.

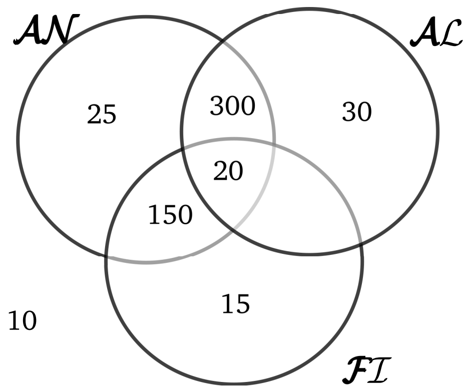


Figura 1. Cantidades de alumnos cursando cada materia

Un ejemplo de uso de los diagramas de Venn para probar una igualdad entre conjuntos es:

Teorema 1.1 (Ley de de Morgan). *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos, entonces* $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c$.

Dem: Miramos los diagramas de Venn de los conjuntos correspondientes y vemos que coinciden! □

[1] J. Venn, On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings, Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 5, vol. **10**, No. 59, (1880).

Antes de hacer varios otros ejemplos de diagramas de Venn (y sus demostraciones), veamos otra manera de demostrar una igualdad entre conjuntos: la llamada *tabla de verdad*. Supongamos que queremos probar que una operación entre un cierto número de conjuntos es igual a otra operación de los mismos (por ejemplo la Ley de de Morgan). El método entonces consiste en considerar, dado un elemento, todas las posibilidades de pertenecer o no a cada uno de los conjuntos involucrados. Luego, se debe estudiar para cada caso si el elemento pertenece a los conjuntos que se quiere comparar. Veamos cómo sería la Ley de de Morgan:

$x \in \mathcal{A}$	$x \in \mathcal{B}$	$x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$	$x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c$	$x \in \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

Para hacer la notación mas sencilla, en general simplemente escribimos $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ en lugar de la afirmación $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Es claro que dos operaciones de conjuntos dan el mismo conjunto si y solo si tienen la misma tabla de verdad, y esto ocurre si y solo si tienen el mismo diagrama de Venn.

Ejemplos. Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$.
2. $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$.
3. Dados dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, definimos la operación *diferencia simétrica* entre ellos (y la notamos $\mathcal{A} \triangle \mathcal{B}$) , como $\mathcal{A} \triangle \mathcal{B} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) - (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Calcular la tabla de verdad de está operación. ¿Cómo se puede definir en términos de los elementos de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{B}$?

Un gran problema de los diagramas de Venn es que se vuelven impracticables al realizar operaciones entre muchos conjuntos. Las tablas de verdad se pueden hacer en cualquier caso, pero el número de casos a considerar crece "demasiado" con el número de conjuntos (ya veremos en el próximo capítulo qué quiere decir esto).

Consideremos el siguiente problema: vamos al kiosco a comprar algunas cosas, y cuando llegamos la persona que atiende nos informa que no disponen de cambio alguno, con lo cual sólo nos pueden vender cosas si pagamos justo. Mirando la billetera encontramos que traemos una moneda de \$1, un billete de \$2 y un billete de \$5. ¿Qué cosas podemos pagar con estos billetes?

El resultado surge de hacer una cuenta que seguramente todos hicimos en alguna circunstancia. Una opción es irnos sin comprar nada (o sea dándole nada al kiosquero), y las otras opciones son juntar \$1, \$2, \$3, \$5, \$6, \$7 u \$8. Lo que hicimos fue calcular del conjunto $\{1, 2, 5\}$ todos sus posibles subconjuntos, y luego sumar los elementos de cada subconjunto, así obtuvimos los subconjuntos: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{5\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$ y $\{1, 2, 5\}$.

Definición. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto, notamos con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ el conjunto de *partes de* $\mathcal{A}$ que es el conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto $\mathcal{A}$.

Ejercicios

1. ¿Quién es $\mathcal{P}(\emptyset)$?
2. Si $\mathcal{A} = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, -3\}$, ¿quién es $\mathcal{P}(\mathcal{A})$?

Por último, otra operación importante entre dos conjuntos es el *producto cartesiano*. Dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ conjuntos, el producto cartesiano de ambos (denotado por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$) es el conjunto de pares (a, b) donde $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos.

- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es el conjunto de números reales, su producto cartesiano es el plano Euclídeo (donde constantemente hacemos gráficos de funciones).
- Si $\mathcal{A} = \{1, \pi, -8\}$ y $\mathcal{B} = \left\{\frac{3}{4}, 0\right\}$, su producto cartesiano es

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(1, \frac{3}{4}), (1, 0), (\pi, \frac{3}{4}), (\pi, 0), (-8, \frac{3}{4}), (-8, 0)\}$$

Para asegurarnos de que no nos olvidamos ningún elemento, podemos listar los elementos de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ en una tabla, donde en las columnas ponemos los elementos de un conjunto y en las filas los elementos del otro. En el ejemplo anterior quedaría

$A\backslash B$	$3/4$	0
1	$(1, 3/4)$	$(1, 0)$
π	$(\pi, 3/4)$	$(\pi, 0)$
-8	$(-8, 3/4)$	$(-8, 0)$

El producto cartesiano lo utilizamos en más cosas de las que pensamos. Por ejemplo, si al levantarnos decidimos vestirnos, tenemos ciertas alternativas de pantalones (o polleras), distintas alternativas de remeras, zapatos, etc. Luego tenemos un conjunto que podemos llamar de "calzado", otro conjunto de "ropa inferior" y un último conjunto de "ropa superior". Cada opción de vestimenta corresponde a un elemento del producto cartesiano de estos tres conjuntos.

Definición. Definimos el *cardinal* de un conjunto como el número de elementos que posee.

Pregunta. ¿Qué cardinal tiene el producto cartesiano de dos conjuntos finitos?

En breve volveremos al cálculo de cardinales de conjuntos.

1.2. Relaciones.

Definición. Dados dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ una relación (binaria) de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Dado $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$, decimos que a está relacionado con b (y lo escribimos $a\mathcal{R}b$) si el par $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Ejemplos. Tomamos como conjunto $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{B} = \{1, 2\}$.

- Consideremos $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. O sea todo elemento del conjunto $\mathcal{A}$ está relacionado con todo elemento del conjunto $\mathcal{B}$.
- Consideremos $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$. ¿Es cierto que $a\mathcal{R}2$? ¿Y que $b\mathcal{R}1$?
- Consideremos $\mathcal{R} = \emptyset$. ¿Es cierto que $a\mathcal{R}2$?

Consideramos ahora relaciones $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. La ventaja de estas relaciones es que (si $\mathcal{A}$ es finito) las podemos representar mediante un *grafo dirigido*. Un grafo dirigido es un conjunto de puntos (llamados vértices) y un conjunto de flechas entre los vértices. Por ejemplo, el grafo $1 \to 2$, $2 \to 3$ del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ (ver la Figura 2). No vamos a hacer uso de la teoría de grafos, aunque ésta juega un rol esencial en varias ramas de la matemática y la computación (como el estudio de circuitos, en las simulaciones de epidemias, etc).

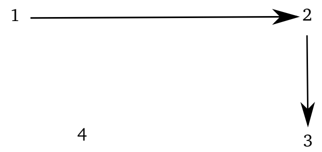


Figura 2. El grafo de una relación

La manera de asociarle un grafo a una relación $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ es poner como vértices los elementos del conjunto $\mathcal{A}$ y luego una flecha por cada elemento de $\mathcal{R}$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$, la flecha asociada es la que parte del vértice a y llega al vértice b. Por ejemplo, tomemos como conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

- La relación $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 4)\}$ se grafica en la Figura 3.

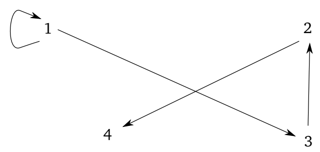


Figura 3. Grafo de la relación $\{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 4)\}$

- A la relación $\mathcal{R} = \emptyset$ le corresponde un grafo sin flechas.
- ¿Qué relación le corresponde al grafo de la Figura 4?

Figura 4

Las relaciones entre un conjunto y sí mismo son especialmente importantes, y algunas de sus posibles propiedades merecen un nombre. Consideremos entonces una relación $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

- $\mathcal{R}$ se dice *reflexiva* si $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo elemento $a \in \mathcal{A}$. En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$ es reflexiva si en cada vértice hay una flecha que parte y termina en él.
- $\mathcal{R}$ se dice *simétrica* si para todo par $(a, b) \in \mathcal{R}$ el par $(b, a) \in \mathcal{R}$ (o sea si $a\mathcal{R}b$ entonces $b\mathcal{R}a$). En términos del grafo, $\mathcal{R}$ es simétrica si por cada flecha en una dirección hay otra en la dirección opuesta.
- $\mathcal{R}$ se dice *antisimétrica* si para todos los elementos $a, b \in \mathcal{A}$ vale la siguiente afirmación: si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ entonces $a = b$ (o sea, si $a \neq b$ entonces no puede a la vez ser $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$). En términos del grafo, $\mathcal{R}$ es antisimétrica si no hay ningún par de flechas en sentidos opuestos.
- $\mathcal{R}$ se dice *transitiva* si para toda terna de elementos $a, b, c \in \mathcal{A}$ tales que $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ se tiene que $(a, c) \in \mathcal{R}$ (o sea si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces

$a\mathcal{R}c$). En términos del grafo, $\mathcal{R}$ es transitiva si hay un “camino directo” por cada “camino en etapas”.

Preguntas. ¿Puede una relación ser simétrica y antisimétrica? Si una relación es simétrica y transitiva, ¿es reflexiva?

Ejercicio 1.1. Uno puede definir una operación de “inversión” en el conjunto de relaciones $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ donde $\mathcal{R}^{-1} := \{(b,a) : (a,b) \in \mathcal{R}\}$ (o sea permutar las coordenadas de los elementos de la relación $\mathcal{R}$). ¿Qué tiene que satisfacer $\mathcal{R}$ para que $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$?

Algunas combinaciones de las propiedades anteriores son importantes, y tienen una teoría rica de fondo, razón por la cual se les da un nombre.

Definición. Una relación $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ se dice:

1. de *equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.
2. de *orden* (u *orden parcial*) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
3. de *orden total* si es una relación de orden parcial y además, dados $a, b \in \mathcal{A}$ vale que $a\mathcal{R}b$ ó $b\mathcal{R}a$ (o sea los elementos se pueden comparar dos a dos).

Un ejemplo a tener en mente son: si $\mathcal{A}$ es el conjunto de los números reales (o naturales, o racionales) entonces $=$ es una relación de equivalencia y $\leq$ es una relación de orden total.

Tomamos el conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y definimos la relación $\mathcal{R}$ por $a\mathcal{R}b$ si a divide a b. Por ejemplo, $(2,4) \in \mathcal{R}$, $(2,10) \in \mathcal{R}$, $(2,7) \notin \mathcal{R}$. Entonces $\mathcal{R}$ es una relación de orden. Pero no es de orden total ya que, por ejemplo, ni $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$.

Otro ejemplo: si miramos el conjunto de partes de un conjunto, y tomamos la relación dada por la inclusión (o sea $\mathcal{A}\mathcal{R}\mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) obtenemos una relación de orden parcial. ¿Por qué no es total?

Las relaciones de equivalencia son muy importantes. Una relación $\sim$ de equivalencia en un conjunto $\mathcal{A}$ parte al conjunto en las llamadas *clases de equivalencia.* Veamos un ejemplo. Tomamos $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $\sim \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dada por $a \sim b$ si, al dividirlos por 3, a y b tienen el mismo resto. Por ejemplo, $1 \sim 4$ porque 1 dividido 3 es 0 y el resto es 1, y 4 dividido 3 es 1 y el resto es 1. También $1 \sim 7$ y $1 \sim 10$. El grafo de $\sim$ está en la Figura 5.

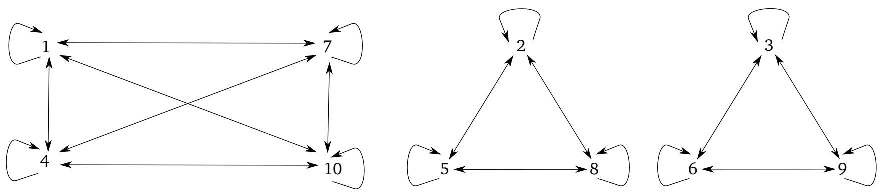


FIGURA 5. Grafo de la relación $\sim$

Si $a \in \mathcal{A}$, su clase de equivalencia es $\bar{a} = \{b \in \mathcal{A} : a \sim b\}$. Notar que $a \in \bar{a}$ por ser reflexiva. En el ejemplo de la Figura 5, $\bar{1} = \{1, 4, 7, 10\}$, $\bar{2} = \{2, 5, 8\}$, $\bar{3} = \{3, 6, 9\}$. Además, $\bar{1} = \bar{4} = \bar{7} = \overline{10}$, $\bar{2} = \bar{5} = \bar{8}$, $\bar{3} = \bar{6} = \bar{9}$.

Proposición 1.2. *Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, y $a, b \in \mathcal{A}$ entonces o bien $\bar{a} = \bar{b}$, o bien $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son disjuntas.*

Demostración. Supongamos que no son disjuntas; entonces se puede tomar algún $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Veamos que $\bar{a} \subset \bar{b}$. Si $d \in \bar{a}$, queremos probar que $d \in \bar{b}$. Para esto, sabemos que $a \sim d$, $a \sim c$ y $b \sim c$. Por simetría, sabemos que $c \sim a$. Entonces, por transitividad, como $b \sim c$, $c \sim a$ y $a \sim d$, tenemos que $b \sim d$. Esto prueba que $d \in \bar{b}$. Y como este razonamiento lo hicimos para cualquier $d \in \bar{a}$, hemos probado que $\bar{a} \subset \bar{b}$. Si hacemos el mismo razonamiento comenzando con elementos de $\bar{b}$, obtenemos la otra inclusión y la igualdad de ambos conjuntos. $\square$

Luego si $\mathcal{A}$ es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$, podemos considerar el *conjunto de clases de equivalencia*. Este es un nuevo conjunto, cuyos elementos son subconjuntos de $\mathcal{A}$. Como ejemplo, si tomamos el caso de la figura 5, el conjunto de clases de equivalencia es

$$\{\{1,4,7,10\},\{2,5,8\},\{3,6,9\}\},$$

que tiene tres elementos.

Ejercicios.

1. Decidir si las siguientes relaciones son de equivalencia y en caso de serlo, calcular el conjunto de clases.
   a) $\mathcal{A}$ es un conjunto cualquiera y $\mathcal{R} = \{(a,a) \ : \ a \in \mathcal{A}\}$.
   b) La relación de la figura 6.

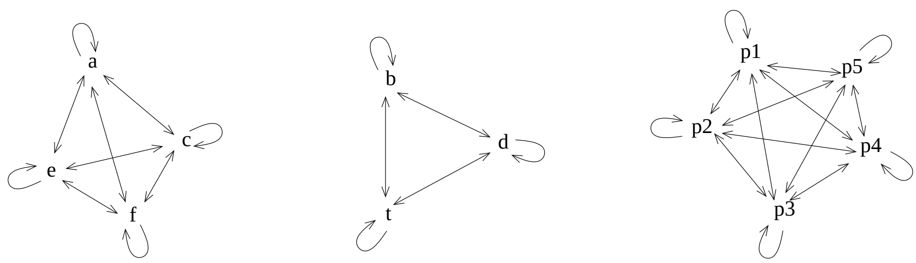


FIGURA 6

   c) $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ y definimos $\mathcal{R}$ de la siguiente manera: si n, $m \in \mathbb{N}$, $n\mathcal{R}m$ si y solo si $n+m$ es par.
   d) En el conjunto de alumnos de la facultad definimos una relación diciendo que dos alumnos están relacionados si cursan una materia en común.
   e) ¿Qué pasa si en el ítem anterior ponemos como relación la condición de cursar exactamente las mismas materias?
2. Si $\mathcal{A} = \{1,2,3,4,5\}$ y $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia tal que las clases son $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$, graficar $\mathcal{R}$.
3. ¿Puede el conjunto $\{\{1,3\},\{2,5\},\{1,4\}\}$ ser el conjunto de clases para alguna relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{A}$ del ítem anterior?

1.3. Funciones. Otra familia importante de relaciones son las llamadas *funciones*. Dados dos conjuntos $\mathcal{A},\mathcal{B}$, una función de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es una relación $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ con las siguientes dos propiedades:

- Para todo elemento $a \in \mathcal{A}$ existe un elemento $b \in \mathcal{B}$ tal que afb.
- Si $a \in \mathcal{A}$ es tal que existen b_1, $b_2 \in \mathcal{B}$ con afb_1 y afb_2 entonces $b_1 = b_2$ (o sea el elemento del ítem anterior es único).

En general notaremos por $f(a)$ al único $b \in \mathcal{B}$ tal que afb, y notamos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a una función del conjunto $\mathcal{A}$ en el conjunto $\mathcal{B}$.

Observación. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son finitos, una función $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se puede dar mediante un diagrama, lo que evita tener que listar toda la relación.

Ejemplos. Determinar si son funciones las siguientes relaciones:

1. La relación de la figura 7.

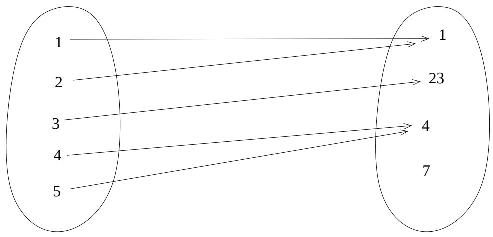


Figura 7

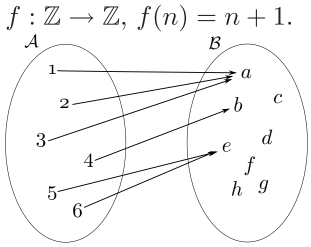
2. $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $F = \{(n, n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
3. $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $F = \{(n, n-1) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
4. $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $F = \left\{(n, m) \ : \ n = m^2\right\}$.
5. $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $F = \left\{(n, m) \ : \ m = n^2\right\}$.
6. ¿Cuándo $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ es una función?
7. En un equipo de fútbol ¿es una función la relación en el conjunto
$$\{\text{jugadores del equipo}\} \times \{\text{camisetas numeradas}\}$$
dada por (jugador, número de camiseta)?

Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función, llamamos *dominio* de f al conjunto $\mathcal{A}$ y *codominio* de f al conjunto $\mathcal{B}$. Esto nos permite hablar de una función f sin tener que estar especificando constantemente qué conjuntos están involucrados en su definición.

Definición. Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definimos la *imagen* de f como el subconjunto de $\mathcal{B}$ dado por $\operatorname{Im}(f) = \{b \in \mathcal{B} \ : \ \text{ existe } a \in \mathcal{A} \text{ con } f(a) = b\}$.

En términos del diagrama de la función, la imagen es el conjunto de elementos a los que les llega (al menos) una flecha.

Ejercicios. Encontrar la imagen de las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
3. 

4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Algunas propiedades importantes que pueden satisfacer las funciones son:

- Una función f es *inyectiva* si satisface la siguiente propiedad: si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$. Equivalentemente, para que f sea inyectiva, dos elementos distintos deben tener imágenes distintas.
- Una función f es *suryectiva* o *sobreyectiva* si para todo $b \in \mathcal{B}$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $f(a) = b$. Equivalentemente, para que f sea suryectiva, debe ser $\mathcal{B} = \mathrm{Im}(f)$ (o sea, el codominio debe ser igual a la imagen).
- Una función f es *biyectiva* si es inyectiva y suryectiva.

Ejercicios. Determinar si cada una de las funciones del ejercicio anterior es inyectiva, suryectiva o biyectiva.

Como en el caso anterior, si $\mathcal{R}$ es una relación en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, definimos su "inversa" como $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{B} \times \mathcal{A}$ como $\mathcal{R}^{-1} := \{(b, a) : (a, b) \in \mathcal{R}\}$. Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función, que propiedades debe satisfacer para que la relación f^{-1} sea una función?

Respuesta: es preciso que f se biyectiva.

Definición. Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función biyectiva, llamamos *función inversa* de f a la función f^{-1}.

1.3.1. Composición de Funciones. Cuando trabajamos con conjuntos, definimos algunas operaciones entre conjuntos. Nos gustaría poder definir algunas operaciones entre funciones. El problema es que no se pueden operar funciones cualesquiera. Por ejemplo, pudimos definir la operación *inversa* en el subconjunto de las funciones biyectivas (no en todo el conjunto de las funciones).

Supongamos que tenemos tres conjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, y dos funciones $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Definimos la *composición* de g con f (y notamos $g \circ f$) como la función $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ dada por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ (ver la ilustración en la figura 8).

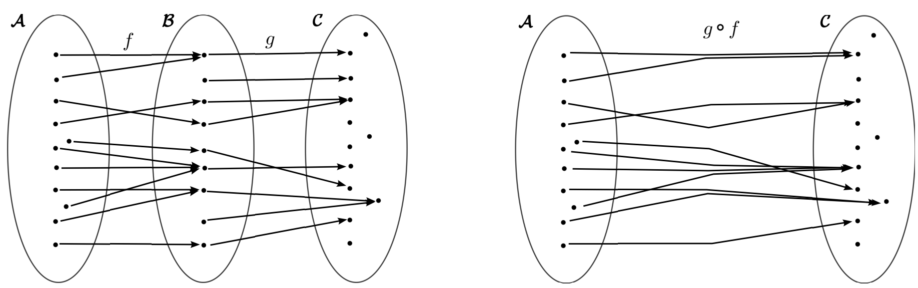


FIGURA 8. Composición de dos funciones $g \circ f$

Pregunta: Supongamos que $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. ¿Que condición hay que pedirle a f y g para poder componer g con f?

Respuesta: Si queremos definir $g \circ f(a) := g(f(a))$, entonces precisamos que $f(a) \in \mathcal{C}$. Luego la condición necesaria y suficiente para poder componer g con f es que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathcal{C}$, o sea que la imagen de f esté contenida en el dominio de g.

Notar que la composición de funciones es una operación binaria de $\{f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\} \times \{g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}\}$ en $\{h : \mathcal{A} \to \mathcal{C}\}$.

Ejemplos.

1. Consideremos las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = |n|$ y $g(n) = n^2$. Calcular $g \circ f$ y $f \circ g$.
2. Consideremos $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dadas por
$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
y
$$g(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$
Calcular $f \circ g$. ¿Qué se puede deducir de f y de g?
3. Dado $\mathcal{A}$ un conjunto cualquiera, consideremos la función *identidad*, $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(a) = a$. Probar que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ es el neutro para la composición en $\{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\}$, o sea $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \circ f = f \circ \mathrm{id}_{\mathcal{A}} = f$.

Proposición 1.3. *Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función biyectiva, entonces existe una única función $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ y $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.*

A dicha función g la llamamos la *inversa de* f y la notamos f^{-1}.

Dem: Como f es biyectiva, ya vimos que podemos definir la relación inversa f^{-1} y esta relación resulta ser una función también. Veamos que f^{-1} satisface las dos condiciones, y que es la única función que lo hace.

Si $b \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(b)$ por definición es el único elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que $f(a) = b$. Luego $(f \circ f^{-1})(b) = f(a) = b$ y se sigue que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. Similarmente, $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$ que es el único elemento $\tilde{a} \in \mathcal{A}$ tal que $f(\tilde{a}) = f(a)$. Pero el único tal elemento es $\tilde{a} = a$, con lo cual $(f^{-1} \circ f)(a) = a$ y se sigue que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.

Veamos la unicidad de g. Supongamos que tenemos dos funciones $g, h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tales que $f \circ g = f \circ h = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ y $g \circ f = h \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Dado $b \in \mathcal{B}$, como f es biyectiva, existe un único $a \in \mathcal{A}$ tal que $f(a) = b$. Luego $g(b) = g(f(a)) = a = h(f(a)) = h(b)$ con lo cual $h = g$ pues toman el mismo valor en todos los elementos de $\mathcal{B}$. $\square$

Ejercicio 1.2. Probar que si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tiene una función inversa, o sea existe una única $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ y $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ entonces f es biyectiva.

Preguntas: Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos conjuntos finitos. Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función cualquiera, ¿se puede dar alguna relación entre $|\mathcal{A}|$ y $|\mathcal{B}|$? ¿y si f es inyectiva? ¿y si f es suryectiva? ¿y si f es biyectiva? Ya discutiremos las respuestas en la parte de combinatoria.

2. Inducción

Comencemos viendo el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.1. Calculemos la suma de los 5 primeros números naturales, ¿cuánto da? Calculemos ahora la suma de los primeros 6 números naturales. ¿Cuánto da? Miremos ahora la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. ¿Cuánto vale en 5? ¿Y en 6? ¿Qué podemos "conjeturar"? Verificar que esta conjetura es cierta para $n = 7, 8, 9$.

Ahora bien, tenemos una afirmación que suponemos cierta (porque lo es en algunos ejemplos calculados) y nos gustaría poder saber si la fórmula vale en general o no. ¡No podemos chequear para cada número natural que la fórmula es cierta! Estamos tratando de demostrar una afirmación para cada número natural (que la suma de los números de 1 hasta n es $\frac{n(n+1)}{2}$). Pero ¿que son los números naturales? Tenemos una noción intuitiva de ellos, pero para poder probar algo sobre los naturales necesitamos una definición formal.

A principios del siglo XX, Peano dio la siguiente definición axiomática de los números naturales:

Definición. El conjunto de números naturales es un conjunto que posee una función “sucesor” que satisfacen los siguientes cinco axiomas:

1. El 1 es un número natural.
2. Todo número natural tiene un sucesor.
3. El 1 no es sucesor de nadie.
4. La función sucesor es inyectiva. Es decir, si $a \neq b$ son números naturales, el sucesor de a es distinto del sucesor de b.
5. Si S es un conjunto cualquiera tal que $1 \in S$ y vale que el sucesor de cualquier elemento de S también está en S, entonces $\mathbb{N} \subset S$.

El último axioma es de una naturaleza distinta a los otros. Puede parecer superfluo, pero si no lo agregamos estaremos considerando conjuntos que no se comportan como los naturales. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{Z} + 1/2\}$ satisface los primeros cuatro axiomas pero no el quinto.

La ventaja de tener una definición axiomática de los números naturales es que nos permite demostrar algunas propiedades sobre tal conjunto. El caso más importante es el *principio de inducción*.

Teorema 2.1 (Principio de Inducción)**.** *Supongamos que tenemos una afirmación $P(n)$ para cada número natural n y queremos probar que la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Si logramos probar que*

- *(primer caso) $P(1)$ es cierta,*
- *(paso inductivo) si $P(n)$ es cierta entonces $P(n+1)$ también lo es,*

entonces la afirmación vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

El principio de inducción es como tener una hilera de piezas de dominó, una parada detrás de la otra, a una distancia tal que cada pieza, si cae, tira a la siguiente. Si tramos la primera pieza, podemos asegurar que todas las piezas caerán.

El principio de inducción es una consecuencia de los axiomas de Peano. Antes de ver la demostración, veamos cómo funciona el principio para el ejemplo con el que comenzamos.

Ejemplo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Demostración: Para $n \in \mathbb{N}$ llamemos $P(n)$ a la afirmación anterior. Debemos probar el primer caso, $P(1)$, y el paso inductivo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

- $P(1)$ es cierta, ya que $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
- Supongamos que $P(n)$ es cierta (o sea, supongamos que $1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, esto se llama la *hipótesis inductiva*) y probemos que $1 + \cdots + (n+1) =$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Como $P(n)$ es cierta (por hipótesis inductiva),

$$1+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

que es lo que queríamos probar.

Ahora sí, veamos por qué el principio de inducción funciona. Llamemos $\mathcal{P}$ al conjunto donde vale la propiedad P. Es decir, $\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{N} \,:\, P(n) \text{ es cierta}\}$. Queremos ver que $\mathcal{P}=\mathbb{N}$. Para probar esto, alcanza con ver que $\mathcal{P}$ satisface el último axioma de Peano. Es decir, debemos ver que $1\in\mathcal{P}$ y que si $n\in\mathcal{P}$ entonces $n+1\in\mathcal{P}$. Pero esto es justamente lo que dice el principio de inducción.

Ejemplo. ¿Cuánto vale la suma $f(n)=\sum_{i=0}^{n}2^i$? Calculemos los primeros términos de esta sucesión: $f(1)=3$, $f(2)=7$, $f(3)=15$. ¿Qué pasa si le sumamos 1 a esta sucesión? Obtenemos $4,8,16$. Estos números son conocidos: son potencias de 2. Es decir, $f(1)=2^2-1$, $f(2)=2^3-1$, $f(3)=2^4-1$. Probemos por inducción que $f(n)=2^{n+1}-1$. Es claro que para $n=1$ la fórmula vale; de hecho, ya lo vimos. Veamos que, si es cierta para n, entonces es cierta para $n+1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1}2^i=\sum_{i=0}^{n}2^i+2^{n+1}\underset{\text{H.I.}}{=}2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$$

como queríamos ver.

La sigla “H.I.” significa “hipótesis inductiva”. Se suele utilizar para indicar que, precisamente en ese paso, hemos usado que la afirmación $P(n)$ es cierta.

Ejemplo. Probar que $2n^3+n+31\geq 3n^2$ para todo $n\geq -2$.

Este ejercicio nos plantea probar una proposición que no es cierta sólo para el conjunto de números naturales, sino para todos los números enteros mayores o iguales que -2. ¿Cómo podemos probar esto? Una manera fácil (aunque no muy útil en general) es aplicar el principio de inducción para el conjunto de números naturales, y después probar que la fórmula es cierta para $n=-2,-1$ y 0. La desventaja de este método es que si queremos probar una afirmación para los enteros mayores o iguales que -10.000, tenemos que verificar a mano 10.001 casos. ¿Será cierto que podemos usar el mismo proceso de inducción, verificando que el primer caso a considerar es cierto y que si la afirmación es cierta para un número entonces también lo es para el siguiente?

La respuesta es “sí”, y es bastante intuitivo que éste es el caso (si uno piensa en el dominó, realmente no importa cómo llamamos a la primera pieza). Si tenemos una afirmación $P(n)$ de la cual queremos probar su veracidad en un conjunto $\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{Z} \,:\, n\geq n_0\}$ para algún n_0 entero, lo que podemos hacer es el cambio de variables $m=n+1-n_0$. Entonces $n\geq n_0 \iff m\geq 1$. Entonces podemos probar la afirmación $P(m)$ para $m\geq 1$, y esto se puede hacer usando inducción. En el ejemplo anterior, $m=n+1-(-2)=n+3$, o $n=m-3$, por lo que $P(m)$ es la afirmación $2(m-3)^3+(m-3)+31\geq 3(m-3)^2$. Podemos probar que esto es verdadero por inducción para $m\geq 1$. Pero también podemos simplemente adaptar el principio de inducción a conjuntos como el mencionado, $\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{Z} \,:\, n\geq n_0\}$.

Para ilustrar, resolvamos el ejercicio:

- $P(-2)$ es cierta, ya que $2\cdot(-8)+(-2)+31=13\geq 3\cdot 4=12$.

- Supongamos que $P(n)$ es cierta y veamos que $P(n+1)$ también lo es.

$$\begin{aligned} 2(n+1)^3 + (n+1) + 31 &= 2n^3 + n + 31 + 6n^2 + 6n + 2 + 1 \\ &\underset{\text{H.I.}}{\geq} 3n^2 + 6n^2 + 6n + 3 = 3(n+1)^2 + 6n^2 \geq 3(n+1)^2 \end{aligned}$$

Lo que acabamos de hacer es usar lo que muchas veces se llama *principio de inducción corrida*. Enunciemos este principio, cuya demostración no es otra cosa que el cambio de variables que mencionamos.

Teorema 2.2 (Principio de inducción corrida)**.** *Sea n_0 un número entero y supongamos que tenemos una afirmación $P(n)$ para cada número entero $n \geq n_0$. Si queremos probar que $P(n)$ es cierta para todo $n \geq n_0$, y logramos probar que*

- *(primer caso) $P(n_0)$ es cierta,*
- *(paso inductivo) para todo $n \geq n_0$ vale que si $P(n)$ es cierta entonces $P(n+1)$ también lo es,*

entonces la afirmación vale para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo. Consideremos la siguiente afirmación: *Si en un conjunto de alumnos de Álgebra I, un alumno está anotado en la Licenciatura en Matemática, todos lo están.*

Veamos la demostración: la vamos a hacer por inducción en el número de alumnos. Esto es, probaremos que si n es un número natural, hay n alumnos en Álgebra I y uno está anotado en Matemática, todos lo están. El primer caso es $n = 1$, es decir, el conjunto es de un solo alumno. Es claro que si tenemos un conjunto con un solo alumno, y es alumno de la Licenciatura en Matemáticas, entonces todos lo son.

Supongamos ahora que tenemos un conjunto de $n+1$ alumnos y que al menos uno de ellos hace Matemática. Tomemos de los $n+1$ alumnos un subconjunto (cualquiera) de n de ellos, con la condición de que tenga al alumno de Matemática. Luego, por hipótesis inductiva, esos n alumnos hacen la Licenciatura en Matemática. Ya hemos probado que todos salvo quizás un alumno están en la Licenciatura en Matemática. Saquemos de nuestro conjunto de n alumnos a uno de ellos, y agreguemos al alumno que nos quedó sin incluir en la hipótesis inductiva. Nuevamente tenemos un conjunto de n alumnos, con uno de ellos que hace Matemática, con lo cual el alumno no considerado en el paso inductivo anterior también debe hacer la Licenciatura en Matemática. ¿Qué está mal en esta demostración?

Ejercicio 2.2. Si r es un número natural cualquiera, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $1^r + \cdots + n^r \geq \int_0^n x^r dx$.

Hay otros dos principios "equivalentes" al principio de inducción. Uno de ellos es el *Principio de inducción completa o global*, que dice:

Teorema 2.3 (Principio de inducción completa (o global))**.** *Dada una afirmación $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, supongamos que*

1. *$P(1)$ es verdadera, y*
2. *si $P(k)$ es cierta para todo $1 \leq k \leq n$ entonces $P(n+1)$ es cierta.*

Entonces la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notar que la diferencia con el principio de inducción es que para demostrar $P(n+1)$ no solo se puede usar $P(n)$ sino también todos los anteriores. El otro principio es el llamado *Principio de Buena Ordenación*, que dice:

Teorema 2.4 (Principio de Buena Ordenación)**.** *Todo subconjunto no vacío del conjunto de números naturales tiene un primer elemento.*

Veamos la equivalencia de estos principios:

- Veamos que el Principio de Inducción implica el Principio de Inducción Global. Supongamos que para todo natural n, $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Llamemos Q a la propiedad $Q(n) = P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n)$. Entonces, si vale $Q(n)$, valen $P(1)$, $P(2)$, $\ldots P(n)$, y por lo tanto vale $P(n+1)$, por lo que vale $Q(n+1)$. El Principio de Inducción dice que $Q(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto dice que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es, vale el Principio de Inducción Global.
- Veamos ahora que el Principio de Inducción Global implica el Principio de Buena Ordenación. Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ y supongamos que $\mathcal{P}$ no tiene primer elemento. Queremos probar que entonces $\mathcal{P}$ es vacío. Para esto, consideramos la afirmación $P(n) : n \notin \mathcal{P}$. Nuestro objetivo es probar que $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, porque en ese caso $\mathcal{P}$ es vacío. Para esto, usamos inducción global.
  - Si fuese $1 \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P}$ tendría un primer elemento y tendríamos una contradicción. Por lo tanto $1 \notin \mathcal{P}$ y $P(1)$ es verdadera.
  - Supongamos que $P(1), \ldots, P(n)$ son verdaderas. Esto es, $1 \notin \mathcal{P}$, $2 \notin \mathcal{P}$,$\ldots n \notin \mathcal{P}$. Si fuese falsa $P(n+1)$ tendríamos $n+1 \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ tendría un primer elemento, $n+1$, lo que sería una contradicción. Luego, $n+1 \notin \mathcal{P}$ y $P(n+1)$ es verdadera.

  Hemos entonces probado que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathcal{P}$ es vacío.
- Veamos por último que el Principio de Buena Ordenación implica el Principio de Inducción. Si tenemos las afirmaciones $P(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $P(1)$ es verdadera y que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, P(n) \text{ es falsa}\}$. Por el Principio de Buena Ordenación, si $\mathcal{P}$ no es vacío, entonces tiene un primer elemento. Llamémoslo N. No puede ser $N = 1$ porque sabemos que $P(1)$ es verdera, por lo que $1 \notin \mathcal{P}$. Entonces $N-1$ es natural y $N-1 \notin \mathcal{P}$; es decir $P(N-1)$ es verdadera. Pero entonces $P(N)$ es verdadera, por lo que $N \in \mathcal{P}$. Hemos llegado a una contradicción, que provino de suponer que $\mathcal{P}$ es no vacío. Luego, $\mathcal{P}$ es vacío y $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Tomemos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si $m \in \mathbb{N}$, vamos a llamar f^m a la composición $f^m = \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{m \text{ veces}}$. Veamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un m tal que $f^m(n) = 1$.

Demostración. Hacemos inducción global en n.

- Si $n = 1$, $f(1) = 2$, y $f(2) = 1$ con lo cual $(f \circ f)(1) = 1$ o sea podemos tomar $m = 2$.
- Supongamos que la afirmación vale para $1 \leq k \leq n$ y veamos que vale para $n+1$. Para poder calcular $f(n+1)$ tenemos que separar en casos según la paridad de n.
  - Si n es impar, $n+1$ es par con lo cual $f(n+1) = \frac{n+1}{2}$. Como $\frac{n+1}{2} \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar la Hipótesis Inductiva a $k = \frac{n+1}{2}$. Existe entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m\left(\frac{n+1}{2}\right) = 1$, con lo cual $f^{m+1}(n+1) = 1$.
  - Si n es par, $n+1$ es impar, con lo cual $f(n+1) = n+2$ y $f^2(n+1) = f(n+2) = \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1$. Pero si $n \geq 2$ (que es el caso por ser n par), $\frac{n}{2} + 1 \leq n$, con lo cual podemos aplicar la Hipótesis Inductiva a $\frac{n}{2} + 1$. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 = f^m\left(\frac{n}{2} + 1\right) = f^{m+2}(n+1)$.

$\square$

Problema abierto: Consideremos una modificación de la función anterior, y definamos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

¿Es cierto que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(n) = 1$? Este problema es conocido como *Problema de Collatz*, y la respuesta no se conoce. Se "conjetura" que la respuesta es "sí", pero no hay una demostración. Numéricamente, está probado que es cierto para $n \leq 5 \cdot 10^{18}$.

Ejemplo. Todo subconjunto acotado T de los naturales tiene un máximo elemento. Para probarlo, llamemos $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ t \leq n \, \forall t \in T\}$. Como T es acotado, sabemos que el conjunto $\mathcal{P}$ es no vacío, con lo cual tiene un primer elemento. Queda como ejercicio para el lector verificar que este primer elemento pertenece al conjunto T (y por lo tanto es un máximo).

2.1. Inducción como herramienta para construir sucesiones. Hasta ahora usamos el principio de inducción como herramienta para probar afirmaciones. Este es un uso "pasivo" de la inducción. Pero el principio de inducción tiene también un lado constructivo. Recordemos la definición de sucesiones:

Definición. Una *sucesión* (en el conjunto $\mathcal{A}$) es una función $f : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$.

En general tomaremos como conjunto $\mathcal{A}$ el cuerpo de números reales. Si $f : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ es una sucesión, vamos a escribir a_n en lugar de $f(n)$, y a la función f la escribiremos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Hasta aquí hemos visto cómo definir sucesiones de manera "explícita", o sea diciendo cuánto vale la función en cada número natural (por ejemplo $a_n = n^2$).

Una manera alternativa de definir una función es darla de manera *recursiva.* Esto es, se definen algunos valores (iniciales) de la función y se da una fórmula para calcular el resto de los valores a partir de los ya conocidos. Por ejemplo, definimos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(1) = 1$ y $f(n) = n \cdot f(n-1)$. Luego el valor $f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 \cdot f(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Veremos más adelante que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Las sucesiones cuyos valores dependen de valores ya conocidos se llaman *sucesiones recursivas* o *sucesiones por recurrencia*. Las preguntas que uno se hace sobre ellas, y que debemos contestar, son: ¿están bien definidas? O sea, ¿esto que definimos es realmente una función? Y por otro lado, ¿se pueden definir de manera explícita?

Antes de avanzar con estas preguntas, veamos otro ejemplo. Definimos $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 14, \quad a_{n+1} = 10a_n - 31a_{n-1} + 30a_{n-2} \text{ si } n \geq 3.$$

Se puede ver que el valor de a_4 depende del de a_3, a_2 y a_1, que están definidos. Una vez que está calculado a_4, con ese valor y el de a_3 y a_2 calculamos a_5, etc. Podemos calcular los primeros valores de a:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 14,\ a_4 = 76,\ a_5 = 446,\\
&a_6 = 2524,\ a_7 = 13694,\ a_8 = 72076,\ a_9 = 371966.
\end{aligned}$$

Sin embargo, estos números no dicen mucho. Si con estos valores queremos calcular a_{10} será sencillo. En cambio, si queremos calcular a_{100}, deberemos calcular todos los números a_i con $i \leq 99$. Esto no es muy cómodo. Lo que nos convendría en ese caso es contar con una *fórmula cerrada*. Esto es, una fórmula en la que a_n no dependa de los anteriores sino solo de n.

Supongamos por un momento que nos dicen que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n+1} - 3^n + 5^{n-1}$. Si esto es cierto, tendremos una fórmula cerrada para a_n. Podemos intentar ver si coinciden algunos valores. Llamemos $b_n = 2^{n+1} - 3^n + 5^{n-1}$. Queremos entonces ver si $a_n = b_n$, y calculamos b_1: $b_1 = 2^2 - 3^1 + 5^0 = 4 - 3 + 1 = 2$, es decir que $b_1 = a_1$. Podemos hacer lo mismo con b_2 y b_3: $b_2 = 2^3 - 3^2 + 5^1 = 8 - 9 + 5 = 4$, $b_3 = 2^4 - 3^3 + 5^2 = 16 - 27 + 25 = 14$, es decir que también coinciden. Tenemos entonces la sospecha de que efectivamente $a_n = b_n$ para todos los $n \in \mathbb{N}$. Pero solo vimos tres casos. Para probarlo en general, debemos usar inducción global.

- El primer paso, con $n = 1$, ya lo vimos.
- Supongamos entonces que $a_k = b_k$ para $k \leq n$ y veamos que es cierto para $k = n + 1$. Si $n + 1 = 2$ ó $n + 1 = 3$ (es decir, si $n = 1$ ó $n = 2$), ya vimos que $a_{n+1} = b_{n+1}$. Podemos entonces suponer que $n \geq 3$, lo que nos permite usar la definición recursiva de a:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 10a_n - 31a_{n-1} + 30a_{n-2}\\
&\underset{\text{H.I.}}{=} 10(2^{n+1} - 3^n + 5^{n-1}) - 31(2^n - 3^{n-1} + 5^{n-2})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 30(2^{n-1} - 3^{n-2} + 5^{n-3})\\
&= 2^{n-1}(10 \cdot 4 - 31 \cdot 2 + 30 \cdot 1) - 3^{n-2}(10 \cdot 9 - 31 \cdot 3 + 30 \cdot 1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 5^{n-3}(10 \cdot 25 - 31 \cdot 5 + 30 \cdot 1)\\
&= 2^{n-1} \cdot 8 - 3^{n-2} \cdot 27 + 5^{n-3} \cdot 125\\
&= 2^{n+2} - 3^{n+1} + 5^n = b_{n+1}
\end{aligned}$$

No es cierto que toda sucesión recursiva tenga una fórmula cerrada, pero en la mayoría de los ejemplos que consideraremos ese será el caso. Por otra parte, aun cuando una sucesión definida de manera recursiva tenga una fórmula cerrada, no siempre será sencillo hallarla. En el ejemplo anterior la fórmula cerrada nos fue dada. Más adelante veremos métodos que pueden ser útiles para calcular una fórmula cerrada de una función recursiva.

Concentrémonos ahora en el otro problema. ¿Está bien definida una función recursiva? Veamos que una sucesión recursiva que dependa de r términos anteriores está bien definida.

Proposición 2.5. *Dado $\mathcal{A}$ un conjunto cualquiera, una r-upla $(a_1, \dots, a_r)$ de elementos de $\mathcal{A}$ y una función*

$$G : \mathbb{N} \times \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_{r \text{ veces}} \to \mathcal{A},$$

existe una única función $f : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ tal que $f(i) = a_i$ para $1 \leq i \leq r$ y tal que $f(n) = G(n, f(n-1), \dots, f(n-r))$.

En el ejemplo anterior, el conjunto $\mathcal{A}$ era el de los enteros y la función G era $G(n, x, y, z) = 10x - 31y + 30z$. De hecho, si reemplazamos x, y, z por a_{n-1}, a_{n-2} y a_{n-3}, obtenemos la definición recursiva de a.

Probemos entonces la proposición.

Demostración. Veamos que existe una función f definida en todos los números naturales que satisface la propiedad enunciada. Llamemos

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ f \text{ está definida en } n\}.$$

Queremos ver que $\mathcal{P} = \mathbb{N}$. Lo probaremos por inducción global.

- Para $i \leq r$, hemos definido $f(i) = a_i$. Esto dice que $1, 2, \dots, r \in \mathcal{P}$.
- Por H.I., f está definida para todos los números $1, 2, \dots, k$ (con $k < n$). Por otra parte, podemos usar que $n > r$ porque el caso $n \leq r$ ya lo vimos. Pero entonces $f(n) = G(n, f(n-1), \dots, f(n-r))$, por lo que f está definida en n y luego $n \in \mathcal{P}$.

La unicidad se ve de manera similar: si f, g son dos funciones que satisfacen las hipótesis, queremos ver que toman los mismos valores. Es claro para los primeros r números. Supongamos que $f(i) = g(i)$ para $1 \leq k < n$, entonces

$$f(n) = G(n, f(n-1), \dots, f(n-r)) = G(n, g(n-1), \dots, g(n-r) = g(n).$$

□

Dar una sucesión de manera recursiva tiene sus ventajas y sus desventajas. En algunos ejemplos es más rápido calcular el valor de la función en n de manera recursiva que de manera explícita (por ejemplo $n!$) mientras que en otros ejemplos es lo contrario (por ejemplo $f(n) = n(n+1)/2 = n + f(n-1)$). En muchas casos la fórmula recursiva permite probar ciertas propiedades de la sucesión que no se ven tan claramente en una fórmula explícita. Por eso es bueno tener las dos definiciones.

Consideremos el siguiente problema (llamado el problema de Torres de Hanoi e inventado por Edouard Lucas en 1883): Supongamos que tenemos tres postes, y un número N de discos de distinto tamaño. Comenzamos con todos los discos en el poste de la izquierda, ordenados por tamaño, con el más grande abajo. Queremos mover los discos al poste de la derecha. En cada movimiento se puede llevar el disco que está más arriba en un poste a otro poste, ubicándolo encima de los discos que estén ahí. La regla principal es que sobre un disco no puede haber otro mayor.

Si tenemos dos discos, movemos el superior al medio, el inferior a la derecha y el del medio a la derecha para transferir todo. Pregunta: ¿cuál es el mínimo número de movimientos necesarios para pasar todos los discos al poste de la derecha? ¿Hay una fórmula cerrada para esta sucesión?

El punto fundamental es que si sabemos resolver el problema con n discos, lo podemos resolver con $n+1$ de la manera que sigue: movemos primero los n discos de arriba al poste del medio (esto lo sabemos hacer, es simplemente intercambiar el rol de los postes del medio y de la derecha); luego, movemos el $n+1$-ésimo disco a la derecha, y por último movemos los n discos del medio a la derecha. Esto dice que si H_n cuenta cuántos movimientos son necesarios si tenemos n discos, entonces $H_{n+1} = 2H_n + 1$. Además, es claro que $H_1 = 1$, pues si tenemos un solo disco lo pasamos en un solo movimiento. Con esta regla recursiva, obtenemos los primeros valores de H:

$$
\begin{array}{lll}
H_1 = 1, & H_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, & H_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31, \\
H_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, & H_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15, & H_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63,
\end{array}
$$

lo cual indica que posiblemente sea $H_n = 2^n - 1$.

Ejercicio 2.3. Probar que efectivamente $H_n = 2^n - 1$.

Según la leyenda, hay en un templo de Hanoi monjes que mueven 64 discos de oro siguiendo las reglas de este juego. La leyenda dice que una vez que terminen de mover la última pieza será el fin del mundo. Suponiendo que mueven un disco por segundo, ¿cuanto tiempo tardarán en moverlos todos?

La sucesión de *Fibonacci*. La famosa sucesión de Fibonacci debe su nombre a Leonardo Pisano Bigollo, más conocido como "Fibonacci" (aprox. 1170-1240). Fibonacci publicó en el año 1202 un libro, Liber Abaci, donde entre otras cosas propuso el siguiente problema: si colocamos una pareja de conejos en un área cerrada, ¿cuántos conejos habrá luego de n meses si cada pareja de conejos produce una nueva pareja de conejos cada mes, los conejos nunca mueren y una pareja a los dos meses de nacida puede comenzar a tener hijos?

En el mes primer mes, cuando los ponemos, tenemos una pareja de conejos bebés. En el segundo mes tenemos la misma única pareja, pero son adultos. En el tercer mes, tenemos una pareja original más una pareja bebé (hijos de la pareja original), o sea tenemos dos parejas. En el cuarto mes, la pareja original tiene otra pareja de bebés, y además la pareja del mes 2 se convierte en adulta (tenemos tres parejas). En el quinto mes, las dos parejas adultas que hay tienen parejas bebés, y tenemos cinco parejas. Si calculamos algunos números más, vemos que los siguientes meses tenemos: 8, 13, 21, 34...

Para encontrar una fórmula para esta sucesión, llamenos A_n al número de parejas adultas en el mes n y B_n al número de parejas bebés. Llamamos también F_n al total de parejas, $F_n = A_n + B_n$.

mes	A_n	B_n	F_n
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	A_n	B_n	$A_n + B_n$
$n+1$	$A_n + B_n$	A_n	$2A_n + B_n$
$n+2$	$2A_n + B_n$	$A_n + B_n$	$3A_n + 2B_n$

Notar que el número de conejos en el mes $n+2$ es el número que había en el mes $n+1$ más el número de parejas adultas del mes $n+1$, que es el número de parejas del mes n. Luego la sucesión F_n satisface la recurrencia $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Además, los primeros dos valores de F son $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Por la proposición 2.5, estas condiciones definen una única sucesión, a la que llamamos *sucesión de Fibonacci*. A los números de la sucesión se los conoce como *números de Fibonacci*.

¿Habrá una fórmula que dé F_n? La respuesta (aunque no natural) es "sí". Para sucesiones dadas por recurrencias con coeficientes constantes (o sea

$$f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_r f(n-r)$$

donde a_i son números reales fijos) existen métodos generales para calcular fórmulas cerradas. En estas notas nos conformaremos con calcular (a mano) una fórmula para los números de Fibonacci. Notar que los números crecen de manera muy rápida, con lo cual uno podría esperar que $F_n = ar^n$, o sea que sean (salvo una constante) potencias de un número. Veremos que este no es exactamente el caso, pero "casi". Si suponemos por un instante que son potencias de un número r, ¿quién es r? Una forma de calcularlo es mirar el cociente de dos números consecutivos de Fibonacci.

Si miramos los primeros valores de la sucesión, vemos que los cocientes sucesivos no dan siempre lo mismo $(2, 3/2, 5/3, 8/5, \dots)$, con lo cual nuestro primer enfoque no funciona. Pero $5/3 = 1.666$, $8/5 = 1.6$, $13/8 = 1.625$, $21/13 = 1.615$, $34/21 = 1.619$ y así siguiendo. Estos cocientes, parecen estar acercándose a un número, pero ¿a cuál? ¿Por qué existe este límite?

Dentro de las muchas propiedades que satisfacen los números de Fibonacci (en la web hay muchísima información al respecto) una importante es la siguiente:

Proposición 2.6 (Identidad de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ *para todo* $n \geq 2$.

Dejamos como ejercicio probar (por inducción) tal identidad. Luego, "veamos" que $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ es de Cauchy. Si miramos dos términos consecutivos,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}}.$$

Dejamos como ejercicio ver que esto implica que la sucesión es de Cauchy, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si n, m son ambos $> N$, entonces $|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_{m+1}}{F_m}| < \varepsilon$. Esto dice que existe el límite de los cocientes sucesivos de números de Fibonacci. Ahora

$$\Phi := \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Multiplicando por Φ, obtenemos que $\Phi^2 = \Phi + 1$, o sea Φ es raíz del polinomio $x^2 - x - 1$. Usando la fórmula para las raíces de un polinomio cuadrático, vemos que $\Phi = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Como debe ser positivo, tenemos que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$

Este número Φ es el llamado *número de oro* o la *proporción divina*. Si tenemos un segmento partido en dos lados de longitudes a y b ($a \geq b$) nos podemos preguntar cómo tienen que ser a y b para que la proporción entre todo el segmento y a sea la misma que entre a y b. En ecuaciones, si llamamos x a esta proporción, tenemos que $x = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{x}$. Entonces debe ser $x = \Phi$. El número de oro aparece en muchos contextos en medicina, biología, en el arte (por ejemplo Leonardo Da

Vinci observó que es la relación aproximada entre los miembros del cuerpo humano y la longitud total de los mismos).

Volviendo a nuestro problema, queremos ver cómo dar una fórmula para F_n, y parece que el número Φ debería tener algo que ver. Ya vimos que F_n no puede ser una constante por Φ (porque los cocientes sucesivos no son constantes), pero observemos qué pasa si planteamos

$$F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para un par de números a, b. Como F_n es entero, es bastante natural plantear este tipo de ecuación (ya volveremos a esto cuando hablemos de polinomios). Si miramos los primeros valores de F_n, tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si utilizamos la regla de Cramer, tenemos que $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $b = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, o sea

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Se deja como ejercicio ver por inducción que esta fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como comentario al margen, se puede observar que Φ es raíz del polinomio $x^2 - (x+1)$. Este polinomio está fuertemente relacionado con la recurrencia. El lector interesado puede pensar cómo resolver una recurrencia del estilo $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ en términos del polinomio $x^2 - (\alpha x + \beta)$.

3. Combinatoria

En el primer capítulo, al trabajar con conjuntos finitos, hablamos de su cardinal. Recordemos que el cardinal de un conjunto es el número de elementos que posee dicho conjunto. En este capítulo nos dedicaremos a "contar" elementos de un conjunto, viendo la dificultad que esto puede tener.

Comencemos con algunos casos sencillos:

Ejemplos.
1. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{0, \dots, 9\}$?
2. ¿Y el conjunto $\{0, \dots, 99\}$?

Es claro que las respuestas son 10 y 100 respectivamente. Pero pensemos el segundo problema a partir del primero. Cada número de dos cifras lo podemos ver como un par ordenado de dos números de una cifra cada uno. Esto es, podemos pensar al conjunto $\{0, \cdots, 99\}$ como el producto cartesiano $\{0, \cdots, 9\} \times \{0, \cdots, 9\}$.

¿Qué pasa si queremos contar cuántos números hay de tres dígitos cuyas cifras estén en el conjunto $\{2, 4, 7\}$? Lo que estamos haciendo es interpretar el conjunto buscado como el producto cartesiano del conjunto $\{2, 4, 7\}$ consigo mismo tres veces.

Proposición 3.1. *Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son conjuntos finitos, entonces $|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$.*

Demostración. Si $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ y $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_m\}$, donde los a_i son distintos y los b_j son distintos (o sea $n = |\mathcal{A}|$ y $m = |\mathcal{B}|$), entonces por definición,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_1), \dots, (a_1, b_m), \dots, (a_n, b_m)\}.$$

Es claro que estos nm elementos son todos distintos, con lo cual $|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = nm$. $\square$

Ejercicio 3.1. ¿Qué pasa si tomamos el producto cartesiano de más conjuntos? Dar una fórmula y probarla por inducción.

Ejemplo. Supongamos que tenemos en nuestro placard 3 camisas, 4 pantalones y 2 pares de zapatos. ¿De cuántas maneras distintas podemos vestirnos?

Ejemplo. Paseando por la calle, entramos a un Pumpernic, y encontramos el siguiente anuncio: "Armá tu hamburguesa con lechuga, tomate, queso y cebolla de cualquiera de las 16 maneras posibles". ¿Es correcto el enunciado?

Lo que estamos haciendo al fin de cuentas es tomar el conjunto de "extras" de la hamburguesa (en este caso el conjunto $\{$lechuga, tomate, queso, cebolla$\}$) y eligiendo algún subconjunto de él. Generalizando el argumento, si $\mathcal{A}$ es un conjunto de n elementos, ¿cuántos subconjuntos tiene $\mathcal{A}$? O dicho de otra forma, ¿cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(\mathcal{A})$?

Ejemplo. ¿Cuántos números de exactamente tres cifras hay? Podemos pensar este ejemplo como sigue: debemos proceder en tres pasos. En el primer paso elegimos la primera cifra, que no puede ser cero. Es decir, tenemos 9 posibilidades. Luego, elegimos la segunda cifra, que puede ser cualquiera. Tenemos 10 posibilidades. Por último, elegimos la tercera cifra, que otra vez puede ser cualquiera. Tenemos 10 posibilidades. En total, son $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números.

Una manera de resumir los ejemplos considerados hasta aquí es la siguiente: si tenemos que contar un proceso de k pasos, donde en cada paso tenemos que hacer una elección y tal que las elecciones son "independientes" (es decir, la elección de un paso no influye en los otros), y si tenemos n_1 posibilidades para la primer elección, n_2 para la segunda, $\dots$, n_k posibilidades para la k-ésima, entonces en total tenemos $n_1 \times \cdots \times n_k$ casos posibles.

Si las elecciones *son* dependientes, este razonamiento ya no vale.

Ejemplo. Aceptando números que empiecen con 0, ¿cuántos números de 4 cifras hay con todos los dígitos distintos?

En este ejemplo, la elección del segundo dígito depende de cuál fue la elección del primero, con lo cual el conjunto que estamos considerando no es un producto cartesiando de conjuntos. De todas maneras, podemos nuevamente proceder por pasos. Para el primer dígito tenemos 10 posibilidades, dado que no tenemos restricción alguna hasta aquí. Si llamamos a_1 al dígito elegido, ¿qué dígitos podemos poner en el segundo lugar? Es claro que cualquier dígito que no sea a_1 nos sirve, luego para el segundo dígito tenemos 9 posibilidades. Si ahora llamamos a_2 al segundo dígito, para el tercer dígito podemos poner cualquiera salvo a_1 y a_2 (que son distintos), por lo que tenemos 8 posibilidades. Para el cuarto tenemos 7. Como todos los números contruidos son distintos (y dan todos los posibles resultados), tenemos $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ números.

Ejemplo. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 50 alumnos en 200 asientos?

Podemos pensar que los alumnos están ordenados (por ejemplo, alfabéticamente, o por fecha de nacimiento, o de cualquier otra manera). El primer alumno se puede sentar en 200 asientos. El segundo, en 199. El tercero, en 198. Así siguiendo, el último tiene 151 asientos para sentarse. Las maneras entonces son

$$200 \cdot 199 \cdot 198 \cdots 151 = \frac{200!}{150!}.$$

Ejercicios. Decidir en cada caso cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos:

1. Funciones de un conjunto de n elementos en un conjunto de m elementos.
2. Funciones inyectivas de un conjunto de n elementos en un conjunto de m elementos.
3. Funciones biyectivas de un conjunto de n elementos en un conjunto de n elementos.

En todos los ejemplos que vimos hasta ahora el *orden* de los elementos a contar era importante (no es lo mismo el número 192 que el número 291 a pesar de que ambos poseen los mismos dígitos). ¿Qué pasa si el orden no importa? Por ejemplo, supongamos que estamos jugando a un juego de naipes (con 40 cartas) y queremos contar las posibles manos (de 3 cartas) que podemos obtener. ¿Cómo hacemos?

Siguiendo los razonamientos hechos hasta acá, uno diría: al repartir las cartas, tengo 40 posibilidades para la primera carta, 39 para la segunda y 38 para la tercera, y entonces las posibles manos son $40 \cdot 39 \cdot 38$. Sin embargo, esto no es correcto, como se puede ver con el siguiente ejemplo: si en la primer mano sacamos el as de espadas, en la segunda el 7 de oros en la tercera el 7 de espadas es lo mismo que haber sacado primero el 7 de espadas, luego el 7 de oros y por último el as de espadas. ¿Cuántas veces estamos contando esta mano? Si pensamos que contarla muchas veces es cambiar el orden en que aparecieron las cartas, vemos que la contamos tantas veces como permutaciones de las tres cartas hay, es decir, $3! = 6$ veces. Ahora, la cantidad de veces que contamos el mismo caso (la mano) no depende de las cartas que obtuvimos, con lo cual el número de manos por seis es $40 \cdot 39 \cdot 38$, o sea el número de manos es $\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1} = 9880$.

Resolvimos el problema utilizando (esencialmente) el caso anterior, pero hay otra forma de pensar este problema. Una mano es un subconjunto de 3 elementos del conjunto de naipes (recordar que un conjunto no posee información del orden en que listamos sus elementos). Luego lo que queremos hacer es contar cuántos subconjuntos de 3 elementos tiene un conjunto de 40 elementos. Ya sabemos que el número de formas es $\frac{40!}{37!3!}$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición. Si n, m son números naturales, con $n \geq m$, definimos el *número combinatorio* $\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Proposición 3.2. *Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de n elementos, el número de subconjuntos de $\mathcal{A}$ de m elementos es $\binom{n}{m}$.*

Demostración. (de manera combinatoria) Si razonamos como antes, si extraemos del conjunto m elementos de manera ordenada, tenemos $\frac{n!}{(n-m)!}$ maneras de hacerlo. Como no nos interesa el orden en que elegimos los elementos, cada caso lo estamos contando $m!$ veces (el número de permutaciones de un conjunto de m elementos), de donde se sigue el enunciado. $\square$

Más abajo haremos otra demostración de este enunciado usando inducción. Notar en particular que $\binom{n}{m}$ es un número natural para cualquier elección de n y m (cosa que no es para nada obvia de su definición). Una propiedad importante de los números combinatorios es la que sigue:

Lema 3.3. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq m \leq n$ entonces $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$.*

Demostración. Si escribimos la definición de los términos de la izquierda y sacamos común denominador, tenemos

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$
$$= \frac{n!(m+1) + n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \binom{n+1}{m+1}$$

□

Ejercicio 3.2. Probar (por inducción) que para todo $n \in \mathbb{N}$ y m natural con $1 \leq m \leq n$, $\binom{n}{m}$ es un número natural.

Podemos ahora demostrar la proposición anterior por inducción en n.

Dem. de la Prop.3.2. (por inducción) El caso base es $n = 1$. Si el conjunto tiene 1 elemento, entonces como $0 \leq m \leq n$, m puede ser 0 ó 1. Es claro que la cantidad de subconjuntos de 0 elementos es 1 (¡el conjunto vacío!) y la cantidad de subconjuntos de 1 elemento es también 1 (todo el conjunto). En ambos casos coincide con el combinatorio $\binom{1}{m}$.

Supongamos entonces que para conjuntos de n elementos vale la proposición, y supongamos que $\mathcal{A}$ tiene $n+1$ elementos. Entonces $0 \leq m \leq n+1$. Los casos $m = 0$ y $m = n+1$ son como antes: en ambos casos hay un solo subconjunto de m elementos. Supongamos entonces que $1 \leq m \leq n$. Podemos tomar un elemento particular de $\mathcal{A}$; llamémoslo x_0. Los subconjuntos de $\mathcal{A}$ los dividimos en dos: los que tienen a x_0 como elemento y los que no. Los subconjuntos de $\mathcal{A}$ de m elementos que no contienen a x_0 son los mismos que los subconjuntos de m elementos de $\mathcal{A} \setminus \{x_0\}$. Como $\mathcal{A} \setminus \{x_0\}$ tiene n elementos, podemos aplicar la hipótesis inductiva y decir que hay $\binom{n}{m}$ de tales subconjuntos. Por otra parte, hay la misma cantidad de subconjuntos de m elementos que contienen a x_0 que de subconjuntos de $m-1$ elementos de $\mathcal{A} \setminus \{x_0\}$, por lo que nuevamente por hipótesis inductiva éstos son $\binom{n}{m-1}$. Entonces, la cantidad de subconjuntos de $\mathcal{A}$ de m elementos es $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$, que por el lema coincide con $\binom{n+1}{m}$. □

Ejercicio 3.3. El Quini 6 consiste en elegir 6 números del conjunto de números $\{1, \ldots, 46\}$. ¿Cuántos posibles resultados hay? (Rta: 9.366.819)

La fórmula del binomio de Newton (probada en la práctica de inducción) dice que si a, b son números reales y n es un número natural,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Podemos interpretar esto de la siguiente manera, $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n}$ con lo cual, al aplicar la propiedad distributiva, para obtener $a^i b^{n-i}$ tenemos que elegir en i lugares el número a y en los restantes el número b. Ahora si tenemos n términos y tenemos que elegir i de ellos para tomar el número a, tenemos $\binom{n}{i}$ maneras de hacerlo, que es lo enunciado.

Antes de pasar al último caso general, veamos cómo podemos combinar lo aprendido hasta acá en casos más complejos. Por ejemplo, ¿cuántos números de 2 cifras hay mayores que 12?

Este ejercicio se puede resolver de dos maneras distintas, pero que nos llevan a lo mismo.

Una manera de responder a la pregunta es la siguiente: los números de 2 dígitos sabemos que son 100. Los números menores o iguales a 12 son 13 (recordar que estamos considerando el 0), luego los otros son mayores que 12 y tenemos $100-13 = 87$ casos.

Pero también se puede pensar de otra manera, separando en casos:

- Si elijo el primer dígito mayor que 1 (y tengo 8 posibilidades), ya el número obtenido será mayor que 12. Luego acá tengo $8 \cdot 10 = 80$ casos posibles.
- Si el primer dígito es 1, el segundo dígito debe ser mayor que dos. Hay 7 números mayores que 2, con lo cual en este caso tengo 7 posibilidades.

Como hemos considerado todos los casos posibles, tenemos 87 posibilidades.

¿Qué tienen en común las dos formas de resolverlo? En ambos usamos el siguiente principio: si tenemos dos conjuntos finitos y disjuntos, el cardinal de la unión es la suma de los cardinales. En la primera resolución dijimos: $\{$números de dos dígitos$\}$ = $\{$números de dos dígitos $> 12\} \cup \{$números $\leq 12\}$. Luego $100 = X + 13$, siendo X el número que queremos calcular.

En la segunda resolución consideramos como conjunto $\mathcal{A} = \{$números con primer dígito $\geq 2\}$ y $\mathcal{B} = \{$números ≥ 12 con primer dígito $1\}$. Claramente $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es el conjunto que buscamos.

¿Qué pasa si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son disjuntos? ¿Qué podemos decir de $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|$ en este caso?

Proposición 3.4. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos conjuntos finitos,* $|\mathcal{A}\cup\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|-|\mathcal{A}\cap\mathcal{B}|$.

Demostración: Llamemos $\mathcal{C} = \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Luego $\mathcal{A} = \mathcal{C}\cup(\mathcal{A}\backslash\mathcal{C})$. Al ser la unión disjunta, $|\mathcal{A}| = |\mathcal{C}|+|\mathcal{A}\backslash\mathcal{C}|$. Análogamente, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|+|\mathcal{B}\backslash\mathcal{C}|$. Como $\mathcal{A}\cup\mathcal{B} = (\mathcal{A}\backslash\mathcal{C})\cup(\mathcal{B}\backslash\mathcal{C})\cup\mathcal{C}$ y dichas uniones son disjuntas, obtenemos que $|\mathcal{A}\cup\mathcal{B}| = |\mathcal{A}\backslash\mathcal{C}| + |\mathcal{B}\backslash\mathcal{C}| + |\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{C}|$. □

Ejercicio 3.4. Deducir y probar una fórmula para la unión de 3 conjuntos.

Ejercicio 3.5. Generalizando los dos casos anteriores, probar (por inducción) que si tenemos n conjuntos $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, entonces

$$|\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} | \cap_{j\in I} \mathcal{A}_j|.$$

Ejemplo. ¿Cuántos anagramas de la palabra "PIANO" podemos formar si pedimos que la letra A esté al lado de otra vocal?

Una manera de resolver este problema es la siguiente: comenzamos viendo al lado de qué letra ubicamos a la A. Definamos $\mathcal{A} = \{$palabras con A pegada a I$\}$. Los elementos de este conjunto satisfacen que en algún lugar de la palabra aparece "AI" ó "IA". Si pensamos que estas dos letras son un solo caracter, y dejamos que las otras letras se ubiquen donde quieran, tenemos 4! posibles palabras (que es el número de permutar este bloque que formamos y las otras 3 letras). Como podemos formas palabras con "AI" ó con "IA" (y estos casos son disjuntos), $|\mathcal{A}| = 2.4!$. De manera análoga, podemos definir $\mathcal{B} = \{$palabras con A pegada a O$\}$ y $|\mathcal{B}| = 2.4!$ también. ¿Quién es $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$? Son las palabras que la letra A esta pegada a la letra

I y a la letra O. Luego $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{$palabras con “IAO” ó con “OAI” en algún lugar$\}$. Contando como antes, $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| = 2.3!$ (justificar esto). Luego la respuesta es $4.4! - 2.3! = 84$.

Ejercicio 3.6. Si tiramos un dado 4 veces, ¿cuántos resultados posibles tenemos? ¿Cuántos tal que en dos tiros consecutivos aparecen números iguales? ¿Cuántos tal que en dos tiros consecutivos aparecen dos números distintos?

Ejercicio 3.7. Vamos 3 parejas al cine, y al llegar debemos decidir como sentarnos. El problema es que dos hombres estamos peleados (por cuestiones futbolísticas) y no queremos sentarnos juntos. ¿De cuántas maneras podemos sentarnos si cada persona tiene que estar con su pareja? (rta: 40).

Ejemplo. Invitamos a 7 amigos a casa a cenar, y queremos sentarnos en una mesa redonda, ¿de cuántas formas podemos hacerlo si no importa la silla en que nos sentamos sino solamente cómo nos ubicamos entre nosotros?

El problema que tienen las mesas redondas es que no se puede marcar un “primer” lugar ni un “último” lugar. Una manera de resolver estos problemas es elegir una persona como referencia (por ejemplo me siento yo primero, y luego veo cómo se van sentando las otras personas mirando para la derecha). Si lo pensamos así, es claro que la respuesta es 6!. Otra manera (a veces más difícil) de pensar este problema es que marcamos una silla y contamos cómo nos sentamos contando las posiciones a partir de esa silla para la derecha (o para la izquierda, claro). El número de formas es el número de permutaciones de las 7 personas, con lo cual hay 7! casos. Pero al estar sentados en una mesa redonda, si nos movemos todos un asiento para la derecha, la forma de sentarnos no cambió. Lo mismo pasa moviéndonos $2, 3, 4, 5$ ó 6 lugares a la derecha. Luego cada forma de sentarnos la contamos 7 veces, con lo cual la respuesta es $\frac{7!}{7} = 6!$.

Ejemplo. ¿Cuántas funciones suryectivas hay de un conjunto $\mathcal{A}$ de n elementos en un conjunto $\mathcal{B}$ de m elementos?

Este problema a pesar de parecer sencillo no lo es tanto. Podemos tratar de contar las funciones que no son suryectivas. Digamos que $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Definimos el conjunto $\mathcal{C}_i = \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tales que b_i no está en la imagen de $f\}$. Queremos contar $|\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i|$. Para usar el principio de inclusión-exclusión, necesitamos saber cuantos elementos tiene la intersección de varios de estos conjuntos, pero $\bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i$ es el conjunto de funciones que no tiene los primeros r elementos en la imagen, o sea que la imagen tiene (a lo sumo) $m - r$ elementos. Ya sabemos que (independientemente de los índices), hay $(m - r)^n$ tales funciones. Luego, por el principio de inclusión-exclusión, el número de funciones suryectivas es

$$m^n - \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \binom{m}{r} (m - r)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{m}{r} (m - r)^n.$$

Notar que el número binomial representa todos los subconjuntos de $\{1, \ldots, m\}$ que hay con r elementos.

3.1. Bosones. El caso que vamos a considerar fue estudiado por el físico Satyendra Bose mirando cómo se comportan las partículas. Las partículas tienen asociados *números cuánticos*. Los fermiones son ciertas partículas que satisfacen que dos de ellas no pueden estar en el mismo lugar y tener los mismos números cuánticos. Si tenemos n partículas (que son indistinguibles) y las queremos ubicar en k *estados cuánticos*, tenemos $\binom{k}{n}$ maneras de hacerlo.

Otra clase importante de partículas son las llamadas bosones (llamadas así precisamente en honor a Bose), que sí pueden compartir el estado cuántico. Si tenemos n bosones, y los queremos ubicar en k estados, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo? Un problema análogo (y tal vez mas intuitivo) es el siguiente: ¿de cuántas maneras podemos poner n bolitas indistinguibles en k cajas?

Comencemos suponiendo que tenemos 2 cajas y 2 bolitas. Luego todas las maneras de poner las bolitas en las cajas son:

$$[\circ\circ][\quad], \qquad [\circ][\circ], \qquad [\quad][\circ\circ]$$

O sea la respuesta es 3. La manera de resolver este problema consiste en encontrar una "representación" del mismo que nos facilite la forma de contar. Para facilitar la notación, representemos por una barra vertical | las paredes de las cajas. Luego los casos anteriores son

$$|\circ\circ|\quad|, \qquad |\circ|\circ|, \qquad |\quad|\circ\circ|$$

Podemos pensar que tenemos dos símbolos distintos, a saber | y $\circ$ (en nuestro caso, dos $\circ$ y tres |), y que lo que estamos haciendo es mirar todas las permutaciones que podemos obtener con estos dos objetos. Esta idea a pesar de ser muy buena, no funciona correctamente, porque al permutar todos, tenemos casos que no corresponden a posiciones permitidas. Por ejemplo,

$$\circ|\quad|\quad|\circ$$

no tiene interpretación en términos de nuestras cajas. En los casos que miramos, las permutaciones tienen necesariamente una barra vertical al comienzo y una barra vertical al final, por lo que podemos no ponerlas. Luego podemos pensar que lo que queremos hacer variar las | interiores y las $\circ$. Así para dos cajas y dos bolitas, lo que queremos es ver todas las permutaciones de una barra vertical y dos círculos. El número de tales permutaciones es $\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ (es elegir de los 3 lugares uno para poner la barra vertical). Este razonamiento demuestra la siguiente proposición:

Proposición 3.5. *Si tenemos n bolitas indistinguibles y las queremos repartir en k cajas, hay $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$ formas de hacerlo.*

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones de esto:

Ejemplo. Tenemos 200 vacantes para Algebra I, y queremos armar 3 turnos con estas vacantes, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

Podemos pensar que cada turno es una caja, y el número de vacantes asociado a cada turno es el número de bolitas que ponemos en cada caja. Luego es un problema de bosones con 3 cajas y 200 bolitas, con lo cual hay $\binom{202}{2} = \frac{202.201}{2} = 20301$.

Ejemplo. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las 200 vacantes si queremos un mínimo de 20 alumnos por turno?

Una manera fácil de conseguir esta condición es poner 20 vacantes en cada turno, y luego repartir (por bosones nuevamente) las 140 vacantes restantes en los 3 turnos, luego la respuesta es $\binom{142}{2} = 10011$.

Ejemplo. ¿De cuántas maneras si no puede haber más de 80 alumnos por curso?

Una manera conocida de resolver este problema es contar su complemento, o sea de cuántas formas podemos armar los turnos tal que alguno tenga más de 80 alumnos. Llamemos $\mathcal{A}_i$ a las distribuciones tales que el turno i tiene más de 80 alumnos. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{A}_i$? Siguiendo el razonamiento anterior, ponemos 81 vacantes en el turno i, y distribuimos las 119 vacantes restantes entre los tres turnos, con lo cual $|\mathcal{A}_i| = \binom{121}{2} = 7260$. La intersección de dos conjuntos son las distribuciones tales que dos turnos tienen más de 80 alumnos. Supongamos (por simplicidad) que miramos cuántas distribuciones de alumnos tienen más de 80 alumnos en el turno 1 y 2. Esto corresponde a poner 81 bolitas en la primera caja y 81 bolitas en la segunda. Luego nos quedan 38 bolitas para repartir entre las tres cajas, con lo cual $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = \binom{40}{2} = 780$. Por último, los tres conjuntos tienen intersección vacía, dado que no hay suficientes vacantes para que haya 81 alumnos en cada turno. Usando el principio de inclusión exclusión, tenemos que el complemento de nuestro problema tiene cardinal

$$3\binom{121}{2} - 3\binom{40}{2} = 19440.$$

Luego las distribuciones con menos de 80 alumnos por clase son $20301 - 19440 = 861$.

Observación: el resultado coincide con $\binom{42}{2}$, que es la cantidad de maneras de poner 40 bolitas en 3 cajas. ¿Por qué?

Ejemplo. ¿Cuántas formaciones "razonables" de un equipo de fútbol hay? Llamamos formación razonable a una formación que tiene al menos 2 defensores, 1 mediocampista y 1 delantero (además del arquero, por supuesto).

Nuevamente ¡tenemos un problema de bosones! Tenemos 11 jugadores en un equipo de fútbol. Estudiamos formaciones, es decir, cuántos jugadores son defensores, cuántos mediocampistas y cuántos delanteros. Esto es, en este ejemplo los jugadores son "indistinguibles". Además del arquero, tenemos 10 jugadores para repartir entre defensores, mediocampistas y delanteros. Podemos pensar que tenemos estas tres cajas, y queremos repartir las 10 bolitas en ellas. Ponemos dos bolitas en la defensa, una en el mediocampo y otra en la delantera, y nos quedan 6 bolitas para repartir en 3 cajas, luego la respuesta es $\binom{8}{2} = 28$.

Ejercicio 3.8. ¿Cuántas funciones crecientes hay del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en el conjunto $\{1, \ldots, m\}$?

Ejercicio 3.9. Si tenemos 5 pesos y queremos apostarlos en la lotería, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo si las apuestas son siempre un número natural de pesos?

Ejercicio 3.10. ¿De cuántas maneras se puede partir un número natural n como suma de k números naturales? (suponiendo por supuesto que $k \leq n$).

4. Probabilidad

Supongamos que queremos realizar un experimento en el que los posibles resultados son finitos (digamos que hay n posibles resultados). Supongamos, además, que todos los posibles resultados son "equiprobables" o, dicho de otra manera, todos los resultados tienen la misma probabilidad de salir. Si tenemos, dentro de los posibles resultados, k de ellos que nos resultan "favorables" (o sea, queremos que salgan), entonces la probabilidad de éxito del experimento es $\frac{k}{n}$.

Observación. La probabilidad en los casos que consideramos es siempre un número racional entre 0 y 1. Además, la probabilidad es 1 si en nuestro experimento todos los casos son favorables y es 0 si ninguno lo es.

Utilizando algunas técnicas de análisis, se puede extender estos conceptos a casos en que el conjunto de resultados no es finito, ni son necesariamente equiprobables. Estas nociones están mas allá del presente curso, sin embargo.

Ejemplos. Veamos cómo la combinatoria nos permite calcular varias probabilidades (muchas de ellas de juegos de azar).

1. Tomemos una moneda equilibrada, y la tiramos al aire. Supongamos que no hay condiciones externas que influyan en la moneda (como viento), ¿qué probabilidad hay de que salga cara?
   Si miramos la definición de probabilidad, lo que debemos hacer es contar el número de resultados posibles para tirar la moneda, y el número de resultados favorables que tenemos. Dado que una moneda tiene dos caras, el número de experimentos es 2, y hay un único resultado favorable. Luego la probabilidad es $1/2$.
2. En las mismas condiciones, ¿qué probabilidad hay de que salga ceca?
3. Supongamos que tomamos una moneda y la tiramos dos veces. ¿Qué probabilidad hay de que salga una cara y una ceca?
   Contemos los resultados en base a qué sale cada vez que uno tira la moneda. Para cada tiro tenemos dos posibilidades, por lo que el número total de resultados es $2 \cdot 2 = 4$. El número de casos favorables es 2 (cara-ceca y ceca-cara). Luego, la probabilidad es $1/2$.
4. Un argumento (falaz) para el ejercicio anterior es el siguiente: cuando tiramos las monedas, los resultados son: obtener dos caras, dos cecas o una y una. Luego, de los 3 casos hay uno solo favorable con lo cual la probabilidad es $1/3$. ¿Qué está mal en esta respuesta?
5. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el Quini6? (rta: 1.06×10^{-7}).
6. ¿Qué probabilidad hay de ganar la lotería?
7. ¿Qué probabilidad hay de que salga rojo en la ruleta? (¿cuánto nos pagan si sale rojo?).
8. En un juego de dados (no cargados), ¿qué probabilidad hay de hacer generala servida? (rta: $\frac{6}{6^5} \sim 0.00077$) ¿y de hacer escalera servida? (rta: $\frac{40}{6^4} \sim 0.03$).
9. Supongamos que debemos hacer escalera, y luego del segundo tiro tenemos los números $\{3, 3, 4, 4, 4\}$. ¿Qué nos conviene? ¿tirar todo de nuevo o sólo 3 dados? (tirar 3 tiene probabilidad 0.055).

Proposición 4.1. *Si tenemos un experimento y dos conjuntos de resultados distintos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que consideramos favorables, $\mathcal{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}) + \mathcal{P}(\mathcal{B}) - \mathcal{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.*

Demostración. Si contamos el número de casos favorables, debemos calcular $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$ por el principio de inclusión exclusión. Si dividimos esta igualdad por el número total de casos, tenemos el resultado buscado. □

Corolario 4.2. *Si un evento $\mathcal{A}$ tiene probabilidad $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ de salir, la probabilidad de que $\mathcal{A}$ no salga es $1 - \mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Ejemplo. ¿Cuál es la probabilidad de que de un grupo de n personas haya al menos dos que cumplen años el mismo día?

Calculemos la probabilidad del complemento, o sea de que en un conjunto de n personas, todas ellas cumplan años en días distintos. Dado que las personas son "distinguibles", podemos pensar que a cada persona tenemos que asignarle un día del año. Luego debemos contar el número de funciones inyectivas de un conjunto de n elementos en uno de 365 (para hacer la cuenta más fácil, olvidemos los 29 de febrero). Sabemos que hay $\frac{365!}{(365-n)!}$ tales formas, con lo cual la probabilidad buscada es

$$1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n} = f(n)$$

Si miramos los primeros valores de esta función, vemos que es creciente (es claro que mientras más personas hay, más probabilidad hay de que dos cumplan el mismo día), y para 23 personas esta probabilidad es aproximadamente 0.5073, o sea es más probable que en 23 personas dos de ellas cumplan el mismo día de que no pase. Si uno calcula un par más de valores, se da cuenta (por ejemplo) que para 30 personas, hay más del 70 % de probabilidad de que dos cumplan el mismo día.

Ejemplo. El Prode (pronóstico deportivo) "antiguo" (hasta 1998) consistía en predecir el resultado de 13 partidos de fútbol (los 10 de primera división y los 3 más importantes de la Primera B Nacional). Para ello uno debía predecir en cada partido si ganaba el equipo local, el equipo visitante, o si empataban. Además (para facilitar el juego), se podían marcar dos *dobles*, es decir, elegir dos opciones "extras" en cualquiera de los 13 partidos. Así por ejemplo uno podía predecir que un partido ganaba el local o que era empate, y si cualquiera de esos dos resultados se cumplía se consideraba como correcta la predicción (la restricción era que los dobles debían utilizarse en partidos distintos, no pudiéndose marcar las tres opciones de un partido). En el Prode moderno, se retiraron los dobles, y uno debe acertar exactamente los 13 juegos. Calcular la probabilidad de ganar en las dos modalidades.

El cálculo del Prode moderno es sencillo, y la probabilidad es cercana a $6,3 \times 10^{-7}$. Veamos qué pasa con el antiguo Prode. Comencemos contando los casos "favorables". Imaginemos que sabemos cuál será el resultado de cada partido, y queremos construir tarjetas ganadoras. Para tal fin, comenzamos eligiendo los partidos donde pondremos los dobles. Tenemos $\binom{13}{2}$ elecciones, y en estos dos partidos hay 2 formas de ubicar las cruces extras (es decir, en estos partidos debemos marcar la opción correcta, y luego nos quedan dos posibilidades para la segunda opción). Del resto de los lugares tenemos que elegir exactamente el resultado correcto, con lo cual el número de casos favorables es

$$2 \cdot 2\binom{13}{2} = 13 \cdot 24 = 312$$

Para contar el número total de resultados, podemos pensar de una manera similar: de los 13 partidos elegimos dos de ellos donde usar la opción extra. Tenemos $\binom{13}{2}$ formas de hacerlo. Una vez escogidos estos lugares, tenemos 3 formas de dejar un lugar desmarcado en cada uno de ellos, (es decir, 9 opciones para los dobles una vez que elegimos dónde ponerlos) y 3^{11} formas de marcar los 11 lugares restantes, con lo cual el número de casos totales es $\binom{13}{2}3^{13}$. Calculando la probabilidad, tenemos

$$\frac{312}{\binom{13}{2}3^{13}} = \frac{312}{124357194} \sim 2,5 \times 10^{-6}$$

O sea con el sistema viejo teníamos 4 veces más chances de ganar que ahora.

Observación: dado un resultado para cada partido, contamos cuántas tarjetas de Prode nos hubiesen servido para ganar. Se puede hacer una cuenta distinta: dada una tarjeta de Prode que armamos, se cuenta cuántas combinaciones de resultados hacen que ganemos. ¿Hay alguna diferencia en el resultado final?

Ejercicio 4.1. Tenemos el siguiente juego: se tiran dos dados (no cargados), y se suman los resultados obtenidos. Si tenemos que apostar entre que la suma sea 9 ó 10, ¿qué nos conviene hacer?

Ejercicio 4.2. Se tiran dos dados repetidas veces hasta que suman 4 ó 7, en cuyo caso el juego se termina. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya terminado por sumar 4 y cuál por sumar 7?