

ANALISIS NUMERICO — Práctica 4

2^{do} Cuatrimestre 2014

Ejercicio 1 Sea

$$u(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^\epsilon}$$

con $0 < \epsilon < 1$ y $(x, y) \in B_R(0)$.

Probar que u tiene derivadas generalizadas de primer orden en $L^2(B_R(0))$; $u \in H^1(B_R(0))$ pero u no tiene representante continuo en $B_R(0)$.

Ejercicio 2 i) Demuestre que la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{1}{3}}$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ donde $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.

ii) Para que valores de α la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^\alpha$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$? Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas.

Ejercicio 3 Probar que las normas

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Verificar que la norma de H^1 se deriva de un producto escalar.

Ejercicio 4 Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

- i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
- iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 5 Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

- i) Defina solución clásica y débil para este problema.
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que existe una solución única en $H^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 6 a) (Teorema de trazas en un rectángulo) Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, probar que dada $u \in H^1(\Omega)$ existe una constante $C > 0$ tal que :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

b) Considerar el problema: encontrar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

donde $f \in C(\bar{\Omega})$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$ son funciones dadas y $\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$.

i) Defina solución clásica y débil en un espacio adecuado $V \subset H^1(\Omega)$.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.

Ejercicio 7 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$ que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\chi_i\chi_j \geq \alpha|\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0$$

Sea también $a_0(x) \in C(\bar{\Omega})$. Se busca una función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

i) Defina solución clásica y débil para este problema.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que para $a_0(x) \geq 0$ en Ω y $f \in L^2$ existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 8 Considere el siguiente problema en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donde β_1 y β_2 son constantes en \mathbb{R} y $f \in L^2(\Omega)$.

i) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V .

ii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.

Sug. : Para ver la coercividad verifique que:

$$\int_{\Omega} \left(\beta_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot v = 0, \quad \forall v \in V$$

Ejercicio 9 1. Dado el problema variacional

$$a(u, v) = \int f v \quad \text{para todo } v \in V$$

con $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Considere la respectiva aproximación de Galerkin sobre un espacio discreto $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2 \subset V$ que posee la propiedad de que $a(v_h^1, v_h^2) = 0$ para todo par $v_h^1 \in V_h^1, v_h^2 \in V_h^2$. Demuestre que $u_h = u_h^1 + u_h^2$ es solución de la aproximación de Galerkin si y solo si los u_h^i resuelven respectivamente

$$a(u_h^i, v_h^i) = \int f v_h^i \quad \text{para todo } v_h^i \in V_h^i$$

2. Tome $a(u, v) = \int_0^1 u' v'$ y $V = H_0^1(0, 1)$ en el ítem previo y considere $(0, 1) = I = \cup_{i=0}^{N-1} I_i$, $I_i = (x_i, x_{i+1})$, con $x_{i+1} = x_i + h$. Tome entonces

$$V_h^1 = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N-1\} = \langle \phi_1, \dots, \phi_{N-1} \rangle$$

con $\phi_i(x_j) = \delta_i^j$, y sea $V_h^2 = \langle \hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_{N-1} \rangle$ con

$$\hat{\phi}_i = \begin{cases} \frac{4}{h^2}(x - x_i)(x_{i+1} - x) & x \in I_i \\ 0 & x \in I - I_i \end{cases}$$

Demuestre que $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2$ está en las hipótesis del ítem previo, y entonces se pide hallar los β_i que verifican $u_h = \sum \alpha_i \phi_i + \beta_i \hat{\phi}_i$.

Ejercicio 10 Dar dos ejemplos de formas bilineales $(a_{i,j})$ diferentes, que corresponden a formas variacionales distintas, pero den lugar al mismo operador diferencial.

Ejercicio 11 Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$. Sea T_h una subdivisión de Ω en elementos K (intervalos en \mathbb{R} , triángulos o cuadriláteros en \mathbb{R}^2 , tetraedros en \mathbb{R}^3). Probar que una función definida en todo Ω y que es polinomial en cada elemento, pertenece a $H^1(\Omega)$ si y sólo si es continua en Ω .

Ejercicio 12 Encontrar la dimensión de los siguientes espacios de funciones, definidas sobre un elemento K en \mathbb{R}^2 :

- i) funciones lineales
- ii) funciones cuadráticas
- iii) $P_r(K) = \{v : v \text{ es un polinomio de grado } \leq r \text{ sobre } K\}$
- iv) funciones bilineales ($v = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$).

Ejercicio 13 Sea C_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, una subdivisión de Ω en triángulos que no se superponen, y tal que los vértices de ningún triángulo se encuentran sobre los lados de otro triángulo).

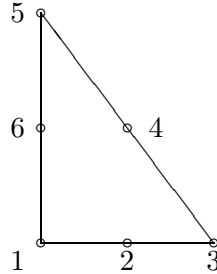
i) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , lineales en cada triángulo de C_h . Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω). Verificar que la función resulta continua.

ii) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , cuadráticas en cada triángulo de C_h . Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por ejemplo por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω) y en el punto medio de cada lado de los elementos de C_h .

Ejercicio 14 Sea T_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , cuadráticas en cada triángulo de T_h .

i) Explicar como elegiría los nodos en cada triángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

ii) Considere ahora el triángulo de referencia y los nodos n_j , $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i , $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



Ejercicio 15 Consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio con borde poligonal, y T_h una triangulación del mismo. Sea $K \subset T_h$ un triángulo de la partición. Llamamos:

h_K = mayor de los lados de K ,

ρ_K = diámetro del círculo inscripto en K ,

$h = \max_{K \in T_h} h_K$.

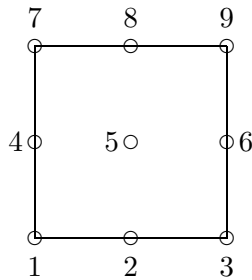
Probar que la condición $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \beta \quad \forall K \in T_h$ es equivalente a que exista $\theta_0 > 0$ tal que para cualquier ángulo θ de cualquier triángulo $K \in T_h$ se tiene $\theta \geq \theta_0$ (esta condición es conocida como "condición del ángulo mínimo").

Ejercicio 16 Sea Q un rectángulo en \mathbb{R}^2 , con lados paralelos a los ejes. Considerar una subdivisión C_h de Q en subrectángulos que no se solapan tal que ningún vértice de ningún rectángulo pertenece al lado de otro rectángulo. Sea V_h el conjunto de funciones continuas definidas en Q , bilineales en cada subrectángulo. Probar que un elemento de V_h está unívocamente determinado por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los nodos en el borde de Q).

Ejercicio 17 Sea Q_h una subdivisión en rectángulos Q , con lados paralelos a los ejes coordinados de un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , tal que en cada rectángulo es una función de $Q_2 = \{v : v = \sum c_j p_j(x) q_j(y)\}$ donde p_j y q_j son polinomios de grado menor o igual a 2.

i) Explicar como elegiría los nodos en cada rectángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

ii) Considere ahora el rectángulo de referencia $[0, 1]^2$ y los nodos n_j , $1 \leq j \leq 9$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i , $1 \leq i \leq 9$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



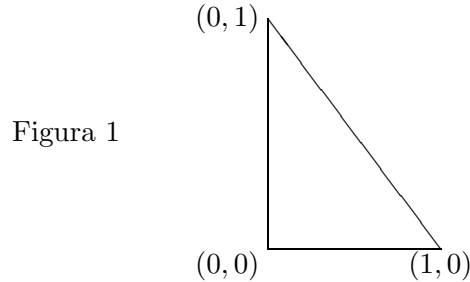
Ejercicio 18 Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x}$$

donde \hat{T} es el triángulo de referencia como se muestra en la Figura 1. Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.



Ejercicio 19 Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{6} (f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 20 Sea T un triángulo genérico de vértices a_1, a_2, a_3 como muestra la Figura 2.

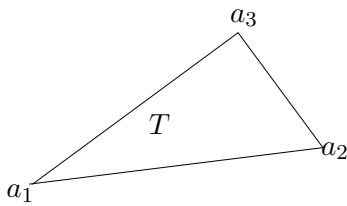


Figura 2

Sea $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ la transformación afín que manda \hat{T} en T . Usando el ejercicio 18 y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x) dx \sim |T| f(a_{123})$$

donde a_{123} es el baricentro del triángulo T , es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 21 Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 19, mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x) dx \sim \frac{|T|}{3} (f(a_{12}) + f(a_{13}) + f(a_{23}))$$

donde $a_{ij}, i < j$ denota el punto medio del lado de vértices a_i y a_j , es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2. (ver Figura 3)

Ejercicio 22 En forma análoga a los ejercicios previos mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x) dx \sim \frac{|T|}{60} \left(3 \sum_{i=1}^3 f(a_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f(a_{ij}) + 27 f(a_{123}) \right)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3. (ver Figura 3)

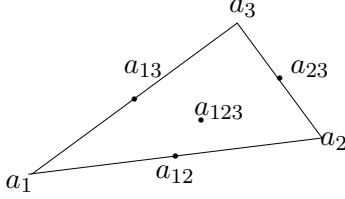


Figura 3

Ejercicio 23 Considerar la triangulación del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ que se obtiene trazando las diagonales, y consiste de cuatro triángulos. Numerar los nodos de la siguiente manera: $N_1 = (0, 0)$, $N_2 = (1, 0)$, $N_3 = (1, 1)$, $N_4 = (0, 1)$, $N_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Hallar las matrices locales y la matriz de rigidez que resultan al resolver el problema del ejercicio 5 usando elementos finitos lineales.

Ejercicio 24 Hacer un programa para resolver la ecuación de Poisson $-\Delta u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = 0$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h .

Ejercicio 25 Hacer un programa para resolver la ecuación $-\Delta u + u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = g$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h .

Ejercicio 26 (Ej. tipo parcial) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz en el plano, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$. Considerar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega & (2.1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega & (2.2) \\ \int_{\Omega} u = 0 & & (2.3). \end{cases}$$

1. Notar que si u es solución de (2.1) y (2.2) entonces $u + C$ también es solución cualquiera sea $C \in \mathbb{R}$.
2. Sea $V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0\}$. Probar que V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$
3. Hallar una formulación variacional en V y probar que dicha formulación tiene una única solución (notar que la condición (2.3) permite tener la unicidad).
4. Sea $V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}_1, \int_{\Omega} v = 0\}$. Sabiendo que $u \in H^2(\Omega)$ probar que $\|u - u_h\|_V \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$.