

ANALISIS NUMERICO — Práctica 3

Segundo Cuatrimestre de 2014

Ejercicio 1. 1. Probar que la función definida como $h(x) = \exp(-1/x^2)$ para $x > 0$, $h(x) = 0$ para $x \leq 0$, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Probar que la función $g(x) = h(x-a)h(b-x)$, $a < b$ es $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[a, b]$.

3. Construir una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en una bola o en un intervalo.

Ejercicio 2. 1. Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg \, dx = 0$ para toda $g \in L^2(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

2. Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg \, dx = 0$ para toda $g \in C_0^k(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

3. Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg \, dx = 0$ para toda $g \in C_0^\infty(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

Ejercicio 3. 1. Demuestre que si $f, g \in L^p$ son tales que $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces g es única.

2. Si la $f \in L^p$ del item previo es derivable entonces $f' = g$.

Ejercicio 4. 1. Considere una función $\psi \in C_0^0(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$ pruebe que $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$ para todo $\omega \in C_0^1(I)$, además $\int_I \theta = 0$.

2. Si $I = (a, b)$, defina $\phi(x) = \int_a^x \theta$ y pruebe que $\phi(x) \in C_0^1(I)$, más aún $\phi' = \theta$.

3. Si f en L_{loc}^1 y $\int_I f\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces $f = cte$ c.t.p. (Sug. tome ϕ como en el item previo y utilice el Ejercicio 2).

Ejercicio 5. Si $g \in L_{loc}^1(I)$ tome $c \in I$ cualquiera, y escriba para $x \in I$ $\int_c^x g = v(x)$, entonces $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$ para todo $\phi \in C_0^1(I)$.

Ejercicio 6. Utilizando el ejercicio previo y tomando f y g como en el ejercicio 3 deduzca la identidad $f(x) = f(c) + \int_c^x g$ para casi todo x .

Ejercicio 7. Utilizando el ejercicio previo demuestre que si $f \in H^1(I)$ entonces $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

Ejercicio 8. Usando el ejercicio previo demuestre que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a, b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Pruebe utilizando este hecho que para I acotado en \mathbb{R} existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \quad (\text{Desigualdad de Poincaré})$$

y por ende

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

Ejercicio 9. Sea $I = (-1, 1)$. Comprobar que:

1. La función $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y que $u' = H$, donde H es la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

2. La función $H \notin W^{1,p}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Notación: Designaremos con $V = \{v : v \text{ es una función continua definida en } [0,1], \text{ con derivada } v' \text{ continua a trozos y acotada en } [0,1], \text{ y que satisface } v(0) = v(1) = 0 \}$.

Notaremos $\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv \, dx$.

Llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno para la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde f es una función continua dada.

y con (V) llamaremos al problema variacional:

Encontrar $u \in V$ tal que $\langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$.

En todos los casos $F(v) = \frac{1}{2} \langle v', v' \rangle - \langle f, v \rangle$.

Ejercicio 10. Probar que si w es continua en $[0, 1]$ y $\int_0^1 wv \, dx = 0 \quad \forall v \in V$, entonces $w(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

Ejercicio 11. Probar que si u satisface el problema (V), y u'' existe en el sentido habitual y es continua, u es también solución del problema (D).

Ejercicio 12. Demuestre que las siguientes formas bilineales son continuas y coercitivas en los respectivos espacios V

1. $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A definida positiva.
2. $V = L^2(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0, 1]$.
3. $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0, 1]$.
4. $V = H_0^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0, 1]$.
5. $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

Ejercicio 13. Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

- i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
- iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.
- v) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\bar{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 14. Realizar el análisis del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

con α y $\beta \in \mathbb{R}$, y f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 15. Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 16. Considerar el problema de contorno:

$$-u'' + ku' + u = f \quad \text{en } [0, 1] \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

Hallar una formulación variacional, y probar que para k suficientemente pequeño el problema variacional tiene solución única. Hallar un valor de k tal que $a(v, v) = 0$ pero $v \neq 0$ para algún $v \in H^1$.

Ejercicio 17. Probar que el espacio vectorial V de las poligonales con vértices en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\phi, \psi) = \sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$.

Ejercicio 18. Considere una partición uniforme del intervalo $(0, 1)$, $\bigcup_1^N I_i = (0, 1)$. Construya el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 13, 15, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in C^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es lineal en cada } I_i\}$$

definiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

Ejercicio 19. Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

$$\text{hallar } u \in H_0^1(I) \text{ tal que } \langle u', v' \rangle = \langle 1, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|u - u_h\|_{L^2}$, y $\|u - u_h\|_{H^1(I)}$ (donde u es la solución clásica), y graficarlas en función de h . ¿Qué sucede cuando se usan elementos cuadráticos?

Ejercicio 20. Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in C^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es cuadrática en cada } I_i\}$$

construya bases adecuadas y obtenga la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 21. Sea $I = (0, 1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I .

$$1. \text{ Definimos para cada } 1 \leq i \leq N-1, \quad G_i(x) = \begin{cases} (1-x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1-x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$$

verifique que $G_i \in H_0^1(0, 1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0, 1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

2. Dada $f \in L^2(0, 1)$ considere el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

escribalo en forma variacional sobre H_0^1 y escriba la formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N-1\}$$

a) Demuestre que ambos problemas variacionales tienen solución única.

b) Demuestre que $\int_0^1 (u - u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del ítem 1. concluya que, en este caso, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos, i. e., $u(x_i) = u_h(x_i)$ donde u_h denota la solución del problema discreto. Verificar numericamente este hecho en el ej. 19.

3. Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

Ejercicio 22. Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f .

Llevar el problema a la forma débil:

Hallar $u \in H_0^2(0, 1)$ tal que

$$\langle u'', v'' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^2(0, 1)$$

demuestre que este problema variacional tiene solución única.

Ejercicio 23. Defina

$$V_h = \{\phi \in C^0([0, 1]), \text{ tales que } \phi \text{ es cúbica en cada } I_i\}$$

y pruebe que en general V_h no está incluido en H^2 . Piense cómo definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset H_0^2$. Construya las bases para W_h .

Ejercicio 24. (Ej. tipo parcial) Dada $f \in L^2(0, 1)$, considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} u \in C^2[0, 1] \\ -u''(x) + au'(x) + u(x) = f(x) & 0 < x < 1, \quad a \in \mathbb{R} \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1. Hallar la forma débil en un espacio adecuado V .
2. Probar que si $u \in C^2([0, 1])$ es una solución débil entonces es solución clásica del problema (incluyendo las condiciones de borde).
3. Probar que si $u \in H^1(0, 1)$ y $u(0) = 0$, entonces vale la desigualdad de Poincaré.
4. Probar que si $|a| < 2$, existe una solución única en V de la formulación débil.
5. Describir un espacio aproximante $V_h \subset V$, adecuado para este problema, y mostrar una base.