ANALISIS NUMERICO

Práctica 1 - Diferencias Finitas

2^{do} Cuatrimestre 2014

Clasificación de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Ejercicio 1 Hallar las regiones donde la ecuación

$$(\alpha + x)\, u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$$

es hiperbólica, elíptica o parabólica. Estudiar su dependencia del parámetro α.

Ejercicio 2 Analice de qué tipo de ecuación de trata en cada una de las regiones que quedan determinadas, en las siguientes ecuaciones:

i. $u_{tt} + tu_{xx} = 0$.

ii. $x^2 u_{tt} - t^2 u_{xx} = 0$.

iii. $x^2 u_{tt} + 2xtu_{tx} + t^2 u_{xx} = 0$.

iv. $u_{tt} + xu_{xx} + \frac{1}{2} u_x = 0$.

Analizar para al menos una cuál es su forma canónica en cada uno de los dominios donde su tipo se conserva.

Ecuaciones Parabólicas en una dimensión espacial.

Ejercicio 3 Se utiliza el esquema en diferencias:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \quad \text{donde } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k/h^2$$

para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$, donde se supone que U tiene derivadas continuas y acotadas hasta el tercer orden en t, y hasta de orden seis en x. Probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = re_{j-1}^n + (1-2r)e_j^n + re_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde

$$T(x_j, t_n) = \frac{h^2}{12}\,(6rU_{tt} - U_{xxxx})_{j,n} + \frac{k^2}{6} U_{ttt}(x_j, t_n + \theta_n k) - \frac{h^4}{360} U_{xxxxxx}(x_j + \theta_j h, t_n)$$

con $-1 < \theta_j < 1$, $0 < \theta_n < 1$. Si el valor máximo de $|T|$ es M, deducir que para $0 < r \leq 1/2$, $|e_{j,n}| \leq tM$. Pruebe que el error de truncado es de orden h^2, salvo para $r = 1/6$ en que es de orden h^4.

Ejercicio 4 Escribir un programa para integrar con el método explícito del Ej. 1, la ecuación del calor $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ en el intervalo $[0,1]$ para un dato inicial arbitrario y con condiciones de borde (de tipo Dirichlet) homogeneas.

Ejercicio 5 Utilizar el programa del ejercicio previo para el caso

$$u_0(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1-x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

Considere $h = 0.05$, $k = 0.0012$, y $k = 0.0013$. Avance por lo menos 50 pasos, que sucede?. Verifique el valor de $r = k/h^2$ en cada caso.

Ejercicio 6 Repetir el ejercicio anterior con $k = 0.0013$ para

$$1) \qquad u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = x(1-x)$$

$$2) \qquad u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)$$

Observe que ambos casos resultan estables en los primeros 50 pasos. Que ocurre con 1) para 100 pasos, y con 2)?. Por que cree que resulta mucho más estable este último caso?.
(Sug.: El dato inicial coincide con un autovector de la matriz tridiagonal resultante.)

Ejercicio 7 En los casos del ejercicio previo, resolver analíticamente y estudiar el comportamiento del error hasta el tiempo $Tf = 1$ utilizando el programa del ejercicio 4. Tome $r = 0.5$ y diversos pasos de discretización en t y x. Plotear $log(\|e^n\|)$ en cada paso de tiempo, donde $\|e^n\| = max_{0\le j\le N}\{|e^n_j|\}$, $N = 1/h$. Observe que el error decrece a medida que el tiempo avanza lo que indica que la cota obtenida el ejercicio *3)* no es demasiado buena.

Ejercicio 8 Idem que el ejercicio anterior pero con

$$1) \;\; u_t = u_{xx} - 2 \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = 0$$

$$2) \;\; u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = 1$$

Que nota en 2)? A que supone que se debe?.

Ejercicio 9 i) Usando el método de Fourier probar que el esquema en diferencias propuesto en el Ej. 3 es estable para $0 \le r \le \frac{1}{2}$.
ii) Considere el esquema en diferencias

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

Cuál es el error de truncado ?. Es estable?.

Ejercicio 10 Considerar la ecuación $u_t = au_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogeneas y con a positivo. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}).$$

i. Probar utilizando el método de Fourier que el método es estable para cualquier valor de r. Qué obtiene con el método matricial?

ii. Probar que el error de truncado es $O(k) + O(h^2)$.

Ejercicio 11 Estudiar la estabilidad y el error de truncado para el método θ, con $0 \leq \theta \leq 1$:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra\{(\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}$$

Que ocurre si $\theta = 1/2$?

Ejercicio 12 Escriba un programa que permita integrar la ecuación del calor con el método de Crank-Nicolson. Estudie numericamente si la condición $r \leq 1$ es necesaria para tener principio del máximo en el esquema.
(Sug.:Tomar un dato inicial que valga cero en todos los nodos salvo en uno).

Ejercicio 13 Considerar la ecuación del calor $U_t = U_{xx}$, en el intervalo $[0, 1]$, con condiciones de Neumann en el borde. Hallar un método centrado en x, y explícito de primer orden en t. Analizar la estabilidad del esquema en diferencias obtenido.

Ejercicio 14 Dada la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$ con b y c en $\mathbb{R}$. Demuestre que las raices están en el círculo unitario $\Leftrightarrow |c| \leq 1$ y $|b| \leq 1 + c$.

(Este resultado facilita el análisis de estabilidad por el método de Fourier para esquemas de tres capas).

Ejercicio 15 Para aproximar las soluciones de $u_t = u_{xx}$ considere $0 \leq \theta \leq 1$ y tome

$$\theta\Big(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2}\Big) + (1-\theta)(u_j^n - u_j^{n-1}) = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

i) Estudie el error de truncado en términos de θ.
ii) Analizar la estabilidad usando el método de Fourier. ¿ A qué conclusión llega ?.

Ejercicio 16 Considerar el esquema en diferencias de tres capas completamente implícito para la ecuación del calor $U_t = aU_{xx}$:

$$\frac{3}{2}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{2}\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} - aL_{xx}u_j^{n+1} = 0$$

donde k es el paso de integración en t, y $L_{xx}u_j^n = \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$. ¿Cuál es el orden del error de truncado?. Estudie la estabilidad con el método de Fourier.

Ejercicio 17 Para aproximar la ecuación $u_t = u_{xx}$ se propone el siguiente esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\triangle t} = \frac{\theta\delta_{xx}(u_j^n) + (1-\theta)\delta_{xx}(u_j^{n-1})}{(\triangle x)^2}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$, y $\delta_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$, .

i. Demostrar que el esquema es consistente cualquiera sea θ.

ii. Demostrar que el método propuesto es estable si $\theta \leq \frac{1}{2}$ y $4r(1-\theta) \leq 1$ con $r = \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2}$.

Ejercicio 18 Para la siguiente ecuación

$$u_t = u_{xx} + \alpha u$$

se propone la aproximación

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \alpha \Delta t u_j^n$$

para $\alpha < 0$ hallar condiciones sobre r que aseguren la estabilidad, si $\alpha > 0$ halle r de modo tal que el radio espectral de la matriz de iteraciones resultante M verifique $\rho(M) \leq (1 + \Delta t \alpha)$ en tal caso demuestre que bajo tales condiciones, si llamamos $\frac{T_{final}}{\Delta t} = N$, se tiene $\|M^N\|_2 \leq C$, C independiente de $\Delta x, \Delta t$, y entonces el esquema resulta estable.

Ejercicio 19 Para $a > 0$, se quieren aproximar las soluciones de $u_t = au_{xx} + u_x$ con un esquema de dos capas explícito en t, centrado de segundo orden en x. De condiciones sobre r que aseguren la estabilidad. Qué sucede si $a \to 0$?. Que sucede si discretiza $u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$?. Estudie el error de truncado en ambos casos.

Ejercicio 20 Se tiene el problema

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x} u_x \qquad x \in (0, 1) \qquad t > 0$$

con las condiciones de borde e iniciales:

$$u_x(0, t) = 0 \qquad u(1, t) = 0 \qquad u(x, 0) = 1 - x^2$$

escriba un esquema explíto en t, centrado de segundo orden en x y de condiciones suficientes sobre $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ para asegurar la estabilidad. Implemente el algoritmo numéricamente.

Ejercicio 21 Para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y dato inicial $U(x.0) = U_0(x)$ se propone el esquema :

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\, \alpha L_{xx}(u_j^{n+1}) + r(1 - \alpha) L_{xx}(u_j^n)$$

donde $L_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$, $r = \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2}$.

i. Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en $\| \cdot \|_2$.

ii. Demostrar que si $r \in [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$ se tiene principio del máximo.

Ejercicio 22 Se busca aproximar la solución de la ecuación

$$u_t = a(x, t) u_{xx} \qquad x \in (0, 1) \qquad t > 0$$

con condiciones de borde de tipo dirichlet homogeneas, y para ello se utiliza el esquema

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} a_j^{n+1/2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

estudie estabilidad y error de truncado. Dé condiciones para que valga el principio del máximo. Reemplaze en el esquema $a_j^{n+1/2}$ por $\frac{a_j^{n+1} + a_j^n}{2}$ y repita los cálculos.

Ejercicio 23 Discretizando las derivadas en x con diferencias centradas halle un esquema explícito que aproxime la solución de la ecuación

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x$$

con condiciones de borde homogeneas. Estudie estabilidad, error de truncado y principio del máximo para el esquema obtenido.

Ecuaciones Parabólicas en dos dimensiones espaciales.

Ejercicio 24 Dada la ecuación del calor en 2-dimensiones

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{con} \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \qquad t > 0$$

Se propone el siguiente esquema de diferencias explicito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + r_x(u_{i+1\,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1\,j}^n) + r_y(u_{i\,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i\,j-1}^n)$$

donde $r_x = \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2}$ y $r_y = \frac{\triangle t}{(\triangle y)^2}$.
Hallar el error de truncado local y dar condiciones sobre r_x y r_y para garantizar la estabilidad.

Ejercicio 25 Resolver numericamente la ecuación del calor $u_t = \triangle u$ en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ con condición de borde de tipo Dirichlet y dato inicial $u_0(x,y)$ utilizando el esquema de diferencias propuesto en el ejercicio anterior.