ANALISIS NUMERICO

Práctica 0 - Repaso

2^{do} Cuatrimestre 2014

Discretización de derivadas

Ejercicio 1 Hallar el error local y el orden de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u:

i. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (forward difference)

ii. $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (backward difference)

iii. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)

iv. $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

Ejercicio 2 Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicite sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejercicio 3 Hallar una fórmula de aproximación para la derivada segunda que utilice los valores de f en $x, x+h$ y $x+2h$. Cuál es el error local?

Repaso de implementación:

Ejercicio 4 Dado el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y & = 0 \\ y(0) & = 1 \\ y(1) & = 0 \end{cases}$$

resolver usando diferencias finitas.

- Usando la discretización habitual para la derivada segunda y diferencias centradas para la aproximación de la primer derivada.

- Usando la discretización de la derivada segunda del ejercicio anterior y la discretización de la derivada primera dada en el ejercicio 1 iv).

Compare la solución obtenida numericamente con la exacta para varios valores del paso h de la discretización, y grafique los errores.

Ejercicio 5 Resuelva analítica y numéricamente el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' - y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

Utilice un método de diferencias finitas para hallar las soluciones numéricas. Compare la solución obtenida con la exacta para varios valores del paso h de la discretización, y grafique los errores.

Ejercicio 6 Si $\varepsilon > 0$, considere el problema

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' - u' &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1. \end{cases}$$

i. Discretice la ecuación usando diferencias centradas para las derivadas

   primera y segunda, y obtenga explícitamente la solución discreta (en función de h y ε).

ii. Para distintos valores de ε y h, compare las gráficas

   de las soluciones discreta y exacta. Qué ocurre si $h >> 2\varepsilon$?

Ejercicio 7 Repita el ejercicio 6, pero ahora discretice usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Ecuaciones de recurrencia:

Ejercicio 8 Hallar la solución general de las sig. ecuaciones de recurrencia:

i. $y(i+2) - y(i+1) - 2y(i) = 0.$

ii. $y(i+3) - 6y(i+2) + 12y(i+1) - 8y(i) = 0.$

iii. $y(i+2) - 2y(i+1) + 2y(i) = 0$

Ejercicio 9 Represente gráficamente las soluciones de las ecuaciones de recurrencia de Ejercicio 8, usando las siguientes condiciones iniciales:

i. $y(0) = 2,\ y(1) = -1.$

ii. $y(0) = 1,\ y(1) = 0,\ y(2) = -1.$

iii. $y(0) = -2,\ y(1) = 0.$

Normas de matrices y radio espectral:

Ejercicio 10 (Teorema de Gerschgorin) Probar que el módulo del mayor autovalor de una matriz cuadrada A no puede ser mayor que la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila o columna .

Ejercicio 11 (Teorema de Brauer) Sea A una matriz cuadrada, y P_s la suma de los módulos de los elementos de la s-ésima fila, excluyendo el elemento a_{ss}. Probar que todo autovalor de A satisface $|\lambda - a_{s,s}| \leq P_s$, para algún s.

Ejercicio 12 Probar que la norma infinito de una matriz es igual a la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila.

Ejercicio 13 Demostrar que para cualquier norma matricial $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial $\rho(A) \leq |||A|||$ donde $\rho(A)$ es el radio espectral de A. Mostrar una matriz A y una norma $||.||$ para la cual $\rho(A) \leq 1$ y sin embargo $||A|| > 1$.

Ejercicio 14 Sea A, tal que sus autovectores forman una base. Muestre una norma $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = |||A|||$.

Ejercicio 15 Demostrar que los autovalores de la matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & & \\ c & a & b & 0\cdots & & \\ 0 & c & a & b & \cdots & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & c & a & b & \\ 0 & \cdots & 0 & c & a & \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son reales o complejos, son $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\ cos(\frac{s\pi}{N+1})$, $s = 1, \cdots, N$.

Sug.: Hallar la ecuación de recurrencia que satisfacen los autovectores.