LA MATRIZ ASOCIADA A ESTE ESQUEMA ES

$$A^m = \begin{pmatrix} -(a^m_{1/2}+a^m_{3/2})\frac{k}{h^2}+1 & a^m_{3/2}\,k/h^2 & & 0 \\ a^m_{1/2}\,k/h^2 & -(a^m_{3/2}+a^m_{5/2})\frac{k}{h^2}+1 & a^m_{5/2}\,k/h^2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & a^m_{M-3/2}\,k/h^2 & -(a^m_{M-3/2}+a^m_{M-1/2})\frac{k}{h^2}+1 & a^m_{M-3/2}\,k/h^2 \\ & 0 & a^m_{M-3/2}\,k/h^2 & -(a^m_{M-3/2}+a^m_{M-1/2})\frac{k}{h^2}+1 \end{pmatrix}$$

DONDE $a^m_\ell = a(x_\ell, t_m)$ (LO PENSAMOS COMO CONSTANTE)

EL PRINCIPIO DEL MAXIMO SE SATISFACE SI EL MAXIMO DE u^n_j SE ALCANZA EN $j=0$ Ó EN $j=M$ Ó EN $m=0$. COMO TENEMOS CONDICION DE BORDE HOMOGENEA $u^n_j \equiv 0$ $\forall m$ en $j=0$ y EN $j=M$ POR LO QUE EL PPIO DEL MAXIMO ES SATISFECHO SI $\|u^m\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$ POR LO QUE LA CONDICION QUE TENEMOS QUE IMPONER ES $\|A\|_\infty \leq 1$. ESTO SE CUMPLE SI $k/h^2 =: r$ ES MENOR QUE $(a^m_{\ell+1/2} + a^m_{\ell+1/2+1})^{-1}$ $\forall m \in \{0,1,\dots,N-1\}, \ell \in \{0,\dots,M-1\}$

SE PUEDE PEDIR SIMPLEMENTE QUE $r \leq 1 / \left(2 \max_{(x,t)\in[a,b]\times[0,T]} a(x,t)\right)$

ESTO TAMBIEN IMPLICA ESTABILIDAD

(OBS SI BUSAMOS LA DEFINICION MENOS RESTRICTIVA DE ESTABILIDAD, $\|u^n\|_\infty \leq K\|u^0\|_\infty$ PODEMOS RELAJAR ESTA CONDICION.)

PARA ESTUDIAR EL ERROR DE TRUNCADO EXTENDEMOS POR TAYLOR $U(x_j \pm h, t_n + k)$. a^m_ℓ SE PUEDE CONSIDERAR CONSTANTE (SE EVALUA EXACTAMENTE, ASI QUE NO HAY ERROR)

$$u_j^{n+1} \sim U(x_j, t_n+k) = U(x_j,t_n) + kU_t(x_j,t_n) + \frac{k^2}{2}U_{tt}(x_j,t_n) + \dots$$

$$u_{j+1}^n \sim U(x_j+h, t_n) = U(x_j,t_n) + hU_x(x_j,t_n) + \frac{h^2}{2}U_{xx}(x_j,t_n) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx} + \frac{h^4}{4!}U_{xxxx} + \dots$$

$$u_{j-1}^n \sim U(x_j-h, t_n) = U(x_j,t_n) - hU_x(x_j,t_n) + \frac{h^2}{2}U_{xx} + \frac{h^3}{3!}U_{xxx} + \frac{h^4}{4!}U_{xxxx} + \dots$$

Y SUSTITUIMOS EN EL ESQUEMA, ASUMIENDO $u_j^n = U(x_j, t_n)$

$$\frac{1}{k}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) = \frac{1}{k}\left(kU_t + \frac{k^2}{2}U_{tt} + \frac{k^3}{3!}U_{ttt} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{h^2}\left(a_{j+1/2}^n u_{j+1}^n - (a_{j+1/2}^n + a_{j-1/2}^n)u_j^n + a_{j-1/2}^n u_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big[a_{j+1/2}^n hU_x + a_{j+1/2}^n \frac{h^2}{2}U_{xx} + a_{j+1/2}^n \frac{h^3}{3!}U_{xxx} + a_{j+1/2}^n \frac{h^4}{4!}U_{xxxx} + \dots$$

$$- a_{j-1/2}^n hU_x + a_{j-1/2}^n \frac{h^2}{2}U_{xx} - a_{j-1/2}^n \frac{h^3}{3!}U_{xxx} + a_{j+1/2}^n \frac{h^4}{4!}U_{xxxx} + \dots\Big]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[U_x h\left(a_{j+1/2}^n - a_{j-1/2}^n\right) + U_{xx}h^2\left(\frac{a_{j+1/2}^n + a_{j-1/2}^n}{2}\right) + \dots\right] = (*)$$

EN ESTE PUNTO, APARENTEMENTE TENEMOS UN ERROR $\mathcal{O}(1/h)$ porque $a_{j+1/2}^n - a_{j-1/2}^n \neq 0$ Y NO PODEMOS EMPAREJARLO CON NADA. AHORA ES CUANDO DESARROLLAMOS $a(x,t)$ CON TAYLOR:

$$a_{j+1/2}^n = a_j^n + \frac{h}{2}(a')_j^n + \frac{h^2}{4}(a'')_j^n + \frac{h^3}{2\cdot 6}(a''')_j^n + \dots$$

$$a_{j-1/2}^n = a_j^n - \frac{h}{2}(a')_j^n + \frac{h^2}{4}(a'')_j^n - \frac{h^3}{2\cdot 6}(a''')_j^n + \dots$$

Y NOS QUEDA QUE

$$(*) = \frac{1}{h^2}\Big(U_x h^2\left((a')_j^n + h^2(a''')_j^n/6 + h^4(a^{v})_j^n/120 + \dots\right)$$

$$+ U_{xx}h^2\left(a_j^n + \frac{h^2}{2}(a'')_j^n + \frac{h^4}{4!}(a^{iv})_j^n + \dots\right) + \dots\Big)$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(U_x h^2 (a')_j^n + \mathcal{O}(h^4) + U_{xx}h^2 a_j^n + \mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(h^4)\right)$$

PONIENDOLO TODO JUNTO:

$$U_t(t_n, x_j) + \frac{k}{2} U_{tt}(t_n, x_j) + O(k^2)$$

$$= U_x (a')_j^n + U_{xx} a_j^n + O(h^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_t - \left(a_j^n U_{xx} + (a_x)_j^n U_x\right)}_{=0 \text{ por la ecuación.}} + O(k) + O(h^2) = 0$$

El ERROR DE TRUNCADO ES $O(k) + O(h^2)$

Lista 2, ej 4

1) Para mirar el error de truncado queremos escribir la ecuación en diferencias como

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + a\left(\frac{\tilde{d}_0 U_j + \tilde{d}_{-1} U_{j-1} + \tilde{d}_{-2} U_{j-2}}{h}\right) = 0$$

con
$$d_0 = 1 + \frac{ak}{h}\tilde{d}_0$$
$$d_{-1} = \frac{ak}{h}\tilde{d}_{-1}$$
$$d_{-2} = \frac{ak}{h}\tilde{d}_{-2}$$

La idea ahora es expandir U_j^{n+1}, U_{j-1}^n, U_{j-2}^n y elegir $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ que hagan 0 el mayor numero posible de terminos de la expansión:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + k(U_t)_j^n + \frac{k^2}{2}(U_{tt})_j^n + \frac{k^3}{3!}(U_{ttt})_j^n + \dots$$

$$U_{j-1}^n = U_j^n - h(U_x)_j^n + \frac{h^2}{2}(U_{xx})_j^n - \frac{h^3}{3!}(U_{xxx})_j^n + \dots$$

$$U_{j-2}^n = U_j^n - 2h(U_x)_j^n + \frac{4h^2}{2}(U_{xx})_j^n - \frac{8h^3}{3!}(U_{xxx})_j^n + \dots$$

A la hora de agrupar ponemos juntos los terminos de mismo orden de derivada en t y en x (porque son los relacionados por la ecuacion):

Orden 0: $U_j^n\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{a}{h}(\tilde{d}_0 + \tilde{d}_{-1} + \tilde{d}_{-2})\right) \rightarrow \boxed{\tilde{d}_0 + \tilde{d}_{-1} + \tilde{d}_{-2} = 0}$

Orden 1 (U_t y U_x): $U_t + aU_x(\tilde{d}_{-1} + 2\tilde{d}_{-2})) \rightarrow \boxed{\tilde{d}_{-1} + 2\tilde{d}_{-2} = -1}$

Orden 2 (U_{tt} y U_{xx}): $\underbrace{U_{tt}\frac{k}{2} + a\frac{h}{2}U_{xx}(\tilde{d}_{-1} + 4\tilde{d}_{-2})}$

$U_{tt} = (-aU_x)_t = -aU_{xt} \Rightarrow \partial_x\left(-a\frac{k}{2}U_t + a\frac{h}{2}U_x(\tilde{d}_{-1} + 4\tilde{d}_{-2})\right)$

$$= -ak\,\partial_x\left(U_t + aU_x\left(\frac{h(\tilde{d}_{-1} + 4\tilde{d}_{-2})}{-ak}\right)\right) \rightarrow \boxed{h(\tilde{d}_{-1} + 4\tilde{d}_{-2}) = -ak}$$

SI PENSAMOS k, h DADOS TENEMOS TRES ECUACIONES QUE DETERMINAN $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_{-1}, \tilde{\alpha}_{-2}$ EN FUNCION DE k Y h. SINO, PODEMOS TRATAR DE ANULAR LOS SIGUIENTES TERMINOS PARA DETERMINAR TAMBIEN h Y k, AUNQUE ESTO NOS VA A PROPORCIONAR UN SISTEMA NO LINEAL:

ORDEN 3: $u_{ttt}\frac{k^2}{3!} + a\frac{h^2}{3!}u_{xxx}(-\tilde{\alpha}_{-1} - \tilde{\alpha}_{-2}\cdot 8) = \circledast$

$$u_{ttt} = ((u_t)_t)_t = ((-au_x))_{tt} = ((-au_t)_{xt} = (a^2u_x)_{xt} = (a^2u_t)_{xx}$$

$$\circledast = \partial_{xx}\left(a^2\frac{k^2}{3!}u_t + a\frac{h^2}{3!}(-\tilde{\alpha}_{-1} - 8\tilde{\alpha}_{-2})u_x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2k^2 = h^2(+\tilde{\alpha}_{-1} + 8\tilde{\alpha}_{-2})$$

ORDEN 4: $u_{tttt}\frac{k^3}{4!} + a\frac{h^3}{4!}u_{xxxx}(16\tilde{\alpha}_{-2} + \tilde{\alpha}_{-1}) =$

$$u_{tttt} = (-a^3u_t)_{xxx} \rightarrow \; = \partial_{xxx}\left(-\frac{k^3a^3}{4!}u_t + \frac{ah^3}{4!}(\tilde{\alpha}_{-1} + 16\tilde{\alpha}_{-2})u_x\right)$$

$$\Rightarrow k^3a^3 = h^3(\tilde{\alpha}_{-1} + 16\tilde{\alpha}_{-2})$$

RESUMIENDO, PODEMOS TRATAR DE RESOLVER:

5x3 no lineal

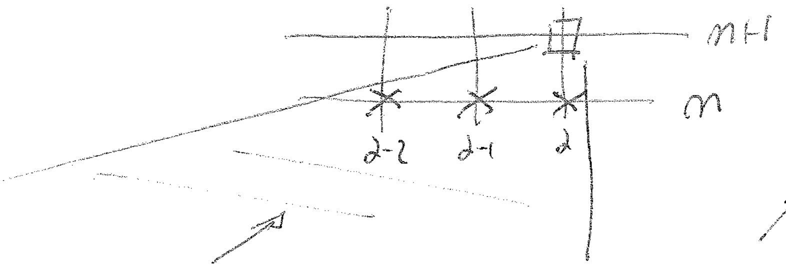
$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_{-1} + \tilde{\alpha}_{-2} = 0\\ \tilde{\alpha}_{-1} + 2\tilde{\alpha}_{-2} = -1\\ \tilde{\alpha}_{-1} + 4\tilde{\alpha}_{-2} = -ak/h\\ \tilde{\alpha}_{-1} + 8\tilde{\alpha}_{-2} = (ak/h)^2\\ \tilde{\alpha}_{-1} + 16\tilde{\alpha}_{-2} = (ak/h)^3\end{array}\right.$$

3x3 lineal

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\tilde{\alpha}_0 = \frac{-ak}{2h} + \frac{3}{2}\\ \tilde{\alpha}_{-1} = \frac{ak}{h} - 2\\ \tilde{\alpha}_{-2} = \frac{-ak}{2h} + \frac{1}{2}\end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\alpha_0 = 1 + \frac{3ak}{2h} + \frac{a^2k^2}{2h^2}\\ \alpha_1 = \frac{2ak}{h} - \frac{a^2k^2}{h^2}\\ \alpha_2 = \frac{-ak}{2h} + \frac{a^2k^2}{2h^2}\end{array}}$$

4.2) Hallar condiciones que aseguren validez de CFL

EN EL ESQUEMA $u_j^{n+1} = d_{-2}u_{j-2}^n + d_{-1}u_{j-1}^n + d_0 u_j^n$
INTERVIENEN LOS PUNTOS:



Por cada paso en tiempo que tomamos la solución depende de nodos a distancia 2h en el paso anterior

ESTE ES EL DOMINIO NUMERICO. COMO u ES SOLUCION DE LA EC. DE TRANSPORTE $u_t + a u_x = 0 \Rightarrow u(x,t) = u_0(x-at)$ ASI QUE QUEREMOS QUE SEAN VALIDAS LAS DESIGUALDADES $x_j - 2nh \underset{(1)}{\le} x_j - ank \underset{(2)}{\le} x_j$

(2) SE CUMPLE SIEMPRE QUE $a \geq 0$

(1) SE CUMPLE SI $\boxed{ak/h \le 2} \xrightarrow[\nu = k/h]{} \nu \le \frac{2}{a}$

PARA LA ESTABILIDAD: $\lambda^n e^{ikjh} = u_j^n$ sustituimos en la ecuación en diferencias y queda, después de simplificar:

$$\lambda = d_{-2}e^{-ik2h} + d_{-1}e^{-ikh} + d_0$$

$$= e^{-ikh}\left(d_{-2}e^{-ikh} + d_{-1} + d_0 e^{ikh}\right)$$

$$= e^{ikh}\frac{a^2k^2}{h^2}\left(e^{-ikh} + e^{ikh} - 1\right) + e^{ikh}\frac{ak}{h}\left(-\frac{3}{2}e^{ikh} - \frac{1}{2}e^{-ikh} + 2\right) + e^{-ikh}e^{ikh}$$

$\nu = \frac{ak}{h}$

$$= \left(\cos(kh) + i\sin(kh)\right)\left[\nu^2\left(2\cos(kh) - 1\right) + \nu\left(2\cos(kh) - i\sin(kh) - 2\right)\right] +$$

$$= 1 + \cos(kh)\left(\nu^2(2\cos(kh)-1) - \nu(\cos(kh)-2)\right) - \sin^2(kh)$$

$$+ i\left(\sin(kh)\right)\left(\nu^2(2\cos(kh)-1) - \nu(2\cos(kh)-2) + \cos(kh)\right)$$

ASÍ QUE EL MODULO DE $|\lambda|^2$ ES

$$\left| 1 + \cos(kh)\left(\nu^2(2\cos(kh)-1)\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)+\frac{3\nu}{2}\right) - \sin^2(kh) \right|^2$$
$$+ \sin^2(kh)\left(\left(\nu^2(2\cos(kh)-1)\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)+\frac{3\nu}{2}\right) + \cos(kh)\right)^2$$

Y QUEREMOS CONDICIONES PARA QUE $|\lambda| < 1$

• • •

AHORA PODEMOS ECHAR CUENTAS PARA SIMPLIFICAR Y VER QUE SALE... (NO LO VOY A HACER)

- "A OJO" SE VE QUE NECESITAMOS $\boxed{\nu + \nu^2 < k^2h^2}$ PARA QUE LA COMPONENTE REAL SEA MENOR QUE 1 ($kh \to 0$, así que los $\cos(kh) \sim 1$ y $\sin(kh) \sim kh$) Y LA COMPONENTE IMAGINARIA ES $O(k^2h^2)$ ASI QUE EN LA PRACTICA TOMAR $\nu + \nu^2 << k^2h^2$ SERIA UN BUEN PUNTO DE PARTIDA
- SI TOMAMOS MODULO EN $\lambda = e^{-ikh}(d_{-2}e^{-ikh} + d_{-1} + d_0 e^{ikh})$ QUEDA

$$|\lambda| \leq |d_{-2}| + |d_{-1}| + |d_0|$$

Y DE AQUI PODEMOS SACAR LA CONDICION TAMBIEN

POR EJEMPLO, SI $ak = h$ SE TIENE $|d_{-2}| + |d_{-1}| + |d_0| = 1$