1 | ESTUDIAR ERROR DE TRUNCADO Y ESTABILIDAD

PARA:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r a \{\theta (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}$$

Error DE TRUNCADO:

$$T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - a\frac{1}{h^2}\{\theta (U_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n}) + (1-\theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

ESCRIBIMOS T_j^n USANDO TAYLOR, ASUMIENDO QUE CONOCEMOS U EN $(x^*, t^*) = (x_j, t_n) + (0, (1-\theta)k)$

PRIMERO: REESCRIBIMOS T_j^n AGRUPANDO POR NODOS:

$$T_j^n = u_{j-1}^n \left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + u_j^n\left(-\frac{1}{k} + 2a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right)$$
$$+ u_{j+1}^n\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + u_{j-1}^{n+1}\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right)$$
$$+ u_j^{n+1}\left(\frac{1}{k} + 2a\frac{\theta}{h^2}\right) + u_{j+1}^{n+1}\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right) \qquad (1)$$

Ahora escribimos la expansión de cada término u_k^l:

RECORDAR: $$U((x^*, t^*) + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha U^{(x^*, t^*)}}{\alpha!} \cdot (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^\alpha$$

Para: $u_{j-1}^{n+1} \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-h, \theta k)$

$u_j^{n+1} \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, \theta k)$

$u_{j+1}^{n+1} \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (h, \theta k)$

$u_{j-1}^n \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-h, -(1-\theta)k)$

$u_j^n \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, -(1-\theta)k)$

$u_{j+1}^n \rightsquigarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (h, -(1-\theta)k)$

ASÍ QUE LA EXPANSIÓN DE T_j^n SERÁ $\sum_{|\alpha|>0} \frac{\partial^\alpha U(x_j^n, t^n)}{\alpha!} \left[\circledast_\alpha \right]$

Con $\circledast_\alpha$ la suma de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^\alpha$ correspondientes a cada uno de los seis términos en (1), multiplicados por los pesos correspondientes. Veamos que es $\circledast_\alpha$ para cada α:

$|\alpha| = 0$ $\partial^\alpha U = U(x_j^n, t^n)$:

$$\circledast_{(0,0)} = -a\frac{(1-\theta)}{h^2} - \frac{1}{k} + 2a\frac{(1-\theta)}{h^2} - a\frac{(1-\theta)}{h^2} - a\frac{\theta}{h^2} + \frac{1}{k} + \frac{2a\theta}{h^2} - \frac{a\theta}{h^2}$$

$$= \boxed{0}$$

$|\alpha| = 1$

$$\circledast_{(1,0)} \left(U_x\right) : -h\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + 0 + h\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) - h\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right) + 0 + h\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right)$$

$j-1,n$ $\quad j,n$ $\quad j+1,n$ $\quad j-1,n+1$ $\quad j,n+1$ $\quad j+1,n+1$

$$= \boxed{0}$$

$$\circledast_{(0,1)} \left(U_t\right) : -(1-\theta)k\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + (-(1-\theta)k)\left(-\frac{1}{k} + 2a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + (-(1-\theta)k)\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right)$$
$$+ \theta k\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right) + \theta k\left(\frac{1}{k} + 2a\frac{\theta}{h^2}\right) + \theta k\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right)$$

$$= \boxed{1}$$

$|\alpha| = 2$

$$\circledast_{(2,0)} \left(\frac{U_{xx}}{2}\right) : h^2\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + 0 + h^2\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + h^2\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right) + 0 + h^2\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right)$$

$$= \boxed{-2a}$$

$$\circledast_{(1,1)} \left(U_{xt}\right) : h(1-\theta)k\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + 0 - h(1-\theta)k\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) - h\theta k\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right) + 0 +$$
$$+ h\theta k\left(-a\theta/h^2\right) = \boxed{0}$$

$$\circledast_{(0,2)} \left(\frac{U_{tt}}{2!}\right) : (1-\theta)^2k^2\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right) + (1-\theta)^2k^2\left(-\frac{1}{k} + \frac{2a(1-\theta)}{h^2}\right) + (1-\theta)^2k^2\left(-a\frac{(1-\theta)}{h^2}\right)$$
$$+ \theta^2k^2\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right) + \theta^2k^2\left(\frac{1}{k} + \frac{2a\theta}{h^2}\right) + \theta^2k^2\left(-a\frac{\theta}{h^2}\right)$$

$$= \boxed{k\left(\theta^2 - (1-\theta)^2\right)}$$

$$|h|=3 \begin{cases} \circledast_{(3,0)} \left(\frac{U_{xxx}}{3!}\right) : \ldots\ 0 \\ \circledast_{(2,1)} \left(\frac{U_{xxt}}{2!}\right) : +2a\left((1-\theta)^2 k - \theta^2 k\right) \\ \circledast_{(1,2)} \left(\frac{U_{xtt}}{2!}\right) : \ldots\ 0 \\ \circledast_{(0,3)} \left(\frac{U_{ttt}}{3!}\right) : \left((1-\theta)^3 + \theta^3\right) k^2 \end{cases}$$

$$|h|=4 \begin{cases} \circledast_{(4,0)} \left(\frac{U_{xxxx}}{4!}\right) : -2ah^2 \\ \circledast_{(3,1)} \left(\frac{U_{xxxt}}{3!}\right) : \ldots\ 0 \\ \circledast_{(2,2)} \left(\frac{U_{xxtt}}{2!2!}\right) : -2ak^2\left((1-\theta)^3 + \theta^3\right) \\ \circledast_{(1,3)} \left(\frac{U_{xttt}}{1!3!}\right) : 0 \\ \circledast_{(0,4)} \left(\frac{U_{tttt}}{4!}\right) : \left(-(1-\theta)^4 + \theta^4\right) k^3 \end{cases}$$

Ahora veamos el orden que nos queda (la potencia más pequeña de k, h que no se anula...)

Tenemos: $$T_j^n = \underbrace{U_t - aU_{xx}}_{=0} + k\left(\theta^2 - (1-\theta)^2\right)\underbrace{\left(\frac{U_{tt}}{2} - aU_{xxt}\right)}_{\neq 0}$$

$$+ k^2\left((1-\theta)^3 + \theta^3\right)\left(\frac{U_{ttt}}{3!} - \frac{a}{2!}U_{xxtt}\right) - h^2\frac{a}{12}U_{xxxx}$$

$$+ O(k^3)$$

En principio el error de truncado es $O(k)+O(h^2)$ pero si tomamos $\theta = 1/2$, entonces $\theta^2 - (1-\theta)^2 = 0$ con lo que tenemos un error de $O(k^2)+O(h^2)$

Para estudiar la estabilidad, como no tenemos ninguna indicación prohibiéndolo, podemos estudiarla en norma 2 y usar el método de Fourier:

Supongamos que $u_j^n = \lambda^n e^{ikjh}$ y sustituyamos en la ecuación en diferencias, obteniendo, después de simplificar:

$$\lambda - 1 = ra\left\{\theta\lambda\left(e^{ikh}+e^{-ikh}-2\right)+(1-\theta)\left(e^{ikh}+e^{-ikh}-2\right)\right\}$$

$$\lambda\left(1 - ra\theta\left(e^{ikh}+e^{-ikh}-2\right)\right) = 1+(1-\theta)ra\left(e^{ikh}+e^{-ikh}-2\right)$$

$$\lambda = \frac{1+(1-\theta)ra\left(e^{ikh}+e^{-ikh}-2\right)}{1-ra\theta\left(e^{ikh}+e^{-ikh}-2\right)}$$

$$\lambda = \frac{1-2ra(1-\theta)+ra(1-\theta)\left(e^{ikh}+e^{-ikh}\right)}{1+2ra\theta-ra\theta\left(e^{ikh}+e^{-ikh}\right)}$$

$$\lambda = \frac{1-2ra(1-\theta)+2ra(1-\theta)\cos(kh)}{1+2ra\theta-2ra\theta\cos(kh)}$$

$\theta = 1 \Rightarrow \lambda = 1/\left[1+2ra(1-\cos(kh))\right] \leq 1 \quad \forall r$

$\theta = 0 \Rightarrow \lambda = 1-2ra(1-\cos(kh)) \leq 1$ si $ra \leq 1/2$

$\theta = 1/2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1-ra(1-\cos kh)}{1+ra(1-\cos kh)}$

18 | tenemos $u_t = u_{xx} + \alpha u$

y discretizamos $u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \alpha \Delta t u_j^n$

• Para $\alpha < 0$ hallar r que asegure la estabilidad

Usando fourier, tenemos:

$$\lambda = 1 + r(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}) + \alpha k$$
$$= 1 + \alpha k - 2r(1 - \cos(kh)) = 1 + \alpha k - 4r \sin^2 \frac{kh}{2}$$

$$-1 \leq 1 + \alpha k - 4r \leq 1$$

siempre cierta $(\lambda < 0)$

$$-2 \leq \alpha k - 4r \Rightarrow r \leq \frac{2 + \alpha k}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha k}{4}$$

• Para $\alpha > 0$ hallar r tq el radio espectral sea
$\rho(M) \leq (1 + k\alpha)$

$$M = \begin{pmatrix} 1-2r+\alpha k & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1-2r+\alpha k & 1 & & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 1-2r+\alpha k & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1-2r+\alpha k \end{pmatrix}$$

2

M es tridiagonal, de $\begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ con $a = 1-2r+k\alpha$

$b = c = 1$

$\Rightarrow$ autovalores son: $\lambda_s = 1-2r+k\alpha + 2\cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right)$ $s=1,\dots,N$

$$\rho(M) \leq (1+k\alpha) \Leftrightarrow -2r + 2\cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) \leq 0$$

$$-2r + 2\cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) \geq -2(1+k\alpha)$$

Obs: Si $1-2r+k\alpha > 0 \Rightarrow \rho(M) = 1-2r+k\alpha + 2\cos\left(\frac{1\pi}{N+1}\right)$

Si $1-2r+k\alpha < 0 \Rightarrow \rho(M) = -\left(1-2r+k\alpha + 2\cos\left(\frac{N\pi}{N+1}\right)\right)$

$1-2r+k\alpha > 0 \Rightarrow$ QUEREMOS: $-2r + 2\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \leq 0$

$$\Rightarrow r \geq \cos\left(\pi/N+1\right)$$

También queremos $-2r + 2\cos\left(\pi/N+1\right) \geq -2(1+k\alpha)$

$\Rightarrow 1+k\alpha \geq r + \cos\left(\pi/N+1\right)$

$\Rightarrow 1+k\alpha - \cos\left(\pi/N+1\right) \geq r$

Juntando:

$\Rightarrow$

$D_1 \in \left[\cos(\pi/N+1),\ (1+k\alpha - \cos(\pi/N+1))\right]$

$D_2 \in \left[\cos(\pi/N+1),\ 1+k\alpha/2\right]$

$r \in D_1 \cap D_2$

$1-2r+k\alpha < 0 \Rightarrow r > (k\alpha+1)/2$

Queremos $-2r + 2\cos\left(\frac{N\pi}{N+1}\right) \leq 0$ (siempre)

$$-2r + 2\cos\left(\frac{N\pi}{N+1}\right) \geq -2(1+k\alpha)$$

$\Rightarrow r \leq 1+k\alpha + \cos\left(N\pi/N+1\right)$

$$\Rightarrow r \in \left[\frac{k\alpha+1}{2},\ 1+k\alpha + \cos\left(N\pi/N+1\right)\right]$$

Para r en uno de ~~esos~~ intervalos,

$$\|M^N\|_2 = \rho(M)^N \le (1+k\alpha)^N = \left(1+\frac{T_{final}}{N}\alpha\right)^N = C$$

INDEPENDIENTEMENTE DE k y h.*

ENTONCES, PARA TODO DATO INICIAL u^0 tenemos

$$u^N = M^N u_0 \rightarrow \|u^N\|_2 \le \|M^N\|_2 \|u_0\|_2 \le C\|u_0\|_2$$

ES DECIR QUE EL METODO ES ESTABLE.

---

* AÚN ESCRIBIÉNDOLO ASÍ, NO HEMOS ELIMINADO LA DEPENDENCIA DE C EN k, PUES SI $k \to 0$ ENTONCES $N \to \infty$, PERO EL LÍMITE CUANDO $N \to \infty$ DE

$$\left(1+\frac{T_{final}\,\alpha}{N}\right)^N$$

ES LA EXPONENCIAL, ASÍ QUE SÍ TENEMOS LA COTA QUE BUSCAMOS $\left(C = e^{T_{final}\cdot\alpha}\right)$

23) ESQUEMA EXPLICITO Y CON DIF. CENTRADAS EN X PARA

$$u_t = (a(t,x)u_x)_x$$

EXPLICITO: $$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{k} = L(a, u^n)$$

alguna combinación de los puntos $u^n_j, \ldots$

COMO EN EL TP, APROXIMAMOS u_x EN PUNTOS INTERMEDIOS DE LA MALLA $x_{j+1/2}$. PODEMOS SUPONER QUE $a(t,x)$ SE PUEDE CALCULAR EXPLICITA EN ELLOS. ASI,

$$a(t_n, x_{j+1/2})\, u_x(t_n, x_{j+1/2}) \sim a(t_n, x_{j+1/2}) \frac{u^n_{j+1}-u^n_j}{h} =: [au]_{j+1/2}$$

Y COMPLETAMOS EL ESQUEMA USANDO DIFF CENTRADAS DE NUEVO:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} = \frac{1}{h}\Big[[au]_{j+1/2} - [au]_{j-1/2}\Big]$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} = \frac{1}{h^2}\Big[a(t_n,x_{j+1/2})\,u^n_{j+1} - \big(a(t_n,x_{j+1/2})+a(t_n,x_{j-1/2})\big)u^n_j + a(t_n,x_{j-1/2})\,u^n_{j-1}\Big]$$