Análisis Numérico - TP 2: **Ondas**

Segundo Cuatrimestre de 2014

Dada $f : [0,1] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, se quiere hallar $u : [0,1] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$u_{tt} = a u_{xx} + f(x,t) \qquad x \in [0,1],\, t \in [0,T] \tag{1}$$

con condiciones de contorno:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

y datos iniciales:

$$u(x,0) = g(x)$$

$$u_t(x,0) = h(x)$$

1. Escriba un programa que resuelva este problema utilizando el esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = a\frac{1}{2}\left\{\frac{\delta_x^2 u^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_x^2 u^{n-1}}{\Delta x^2}\right\}$$

   El programa debe recibir como parámetros el paso espacial dx, el paso temporal dt, el tiempo final T, el coeficiente de difusividad a, el dato inicial g y la fuente f. Considere particularmente los casos:

$$f(x,t) = 0,\ g(x,0) = \sin(\pi x),\ h(x,0) = 0$$

$$f(x,t) = 0,\ g(x,0) = \sin(\pi x),\ h(x,0) = \sin(2\pi x)$$

$$f(x,t) = \sin(\pi x)\cos(t),\ g(x,0) = 0,\ h(x,0) = 0$$

2. Modifique el programa anterior para resolver el problema con condiciones de contorno:

   - $u(0,t) = \sin(t)$, $u(1,t) = \cos(t)$
   - $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$

3. Considere la extensión del problema a $\Omega = [0,1]^2$, el cuadrado unitario. Es decir, para $f : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, se quiere hallar $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Delta u + f(x,y,t) \qquad (x,y) \in \Omega,\, t \in [0,T] \tag{2}$$

   con condiciones de contorno:

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

   y datos iniciales:

$$u(x,y,0) = g(x,y)$$

$$u_t(x,y,0) = h(x,y)$$

a. Escriba un programa que resuelva este problema utilizando el esquema:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = a\frac{1}{2}\left\{ \frac{\delta_x^2 u^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{\delta_x^2 u^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u^{n-1}}{\Delta y^2} \right\}$$

Con

$$f(x,y,t) = (x - x^2)(y - y^2)\cos(b\pi t)$$

$$g(x,y) = 0$$

$$h(x,y) = 0, \quad h(x,y) = (y - y^2)(x - x^2), \quad h(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(\pi y), \quad h(x,y) = 2$$

Como antes, el programa debe recibir como parámetros los pasos espaciales dx, dy, el paso temporal dt, el tiempo final T, el coeficiente de difusividad a, el dato inicial g y la fuente f.

b. Pruebe a variar los parámetros a y b:

$$a = 1, \quad a = 0{,}1, \quad a = 10$$

$$b = 1, \quad b = 0{,}1, \quad b = 10$$

Encuentra alguna relación?

4. Grafique la evolución de u en los casos planteados.