1	2	3

COND.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

2^{do} Parcial de Análisis Numérico
04/12/2008

---

1. Dada $f \in L^2((0,1)), 0 < \alpha \leq 1$, considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u' = f \text{ en } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

   a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución.
   Sugerencia: Usar que vale la desigualdad de Poincaré en V: $\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2$.

   b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio $V_h \subset V$ en dónde $V_h = \{v \in V : v|_I \in \mathcal{P}_1\}$. Mostrar que existe solución única de este problema. Sean u la solución del Problema Variacional y u_h la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \to 0 \qquad \text{cuando } h \to 0.$$

   c) Asumiendo que $u \in H^2(0,1)$ y que existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^2} \leq c\|f\|_{L^2}$, probar que se tiene convergencia cuadrática en L^2, es decir, que existe $k > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq kh^2\|f\|_{L^2}.$$

   Sugerencia: Usar argumentos de Dualidad.

2. Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $\alpha > 0$, sea el problema

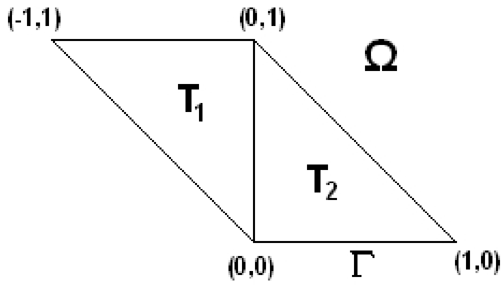
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \alpha u + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega - \Gamma \\ u = 0 & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

   donde Ω es el paralelogramo de vértices (0,0), (1,0), (0,1) y (-1,1), y $\Gamma = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$.

   a) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V, con $H_0^1(\Omega) \subsetneq V \subsetneq H^1(\Omega)$.

   b) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.

   c) Sean $\alpha = 3$ y $V_h = \{v \in V : v|_T \in \mathcal{P}_1\}$. Plantear el Problema Variacional Discreto dada la triangulación de la figura de la siguiente carilla y hallar la matriz de rigidez K.



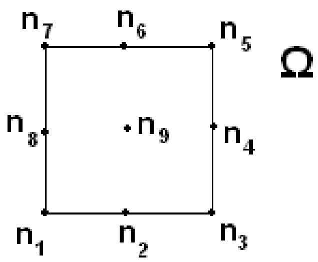
3. **Parte A.** Sean $a(\cdot,\cdot)$ un producto interno en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, y $L \in \mathbb{H}^*$. Dados un subespacio cerrado $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$ y un elemento $u \in \mathbb{V}$, probar que son equivalentes:

   - u satisface $a(u,v) = L(v)\ \forall v \in \mathbb{V}$,
   - u minimiza el funcional $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ sobre $\mathbb{V}$.

   Parte B. Sean $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ y

   $$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \sum_{j=0}^{2} c_j p_j(x) q_j(y) : p_j, q_j \text{ son polinomios de grado a lo sumo } 2 \right\}.$$

   Si se toman los nodos de la forma que indica la figura:



   a) Probar que si $\phi \in \mathcal{Q}_2$ es tal que $\phi(n_j) = 0\ \forall 1 \le j \le 9$, entonces $\phi \equiv 0$ y, por ende, el conjunto de nodos es 2-unisolvente.

   b) Hallar las bases de Lagrange β_j tales que $\beta_j(n_i) = \delta_{ij}$, $\beta \in \mathcal{Q}_2$ para $j = 1, 5$ y 9.

Justificar todas las respuestas