

**Topología**  
Segundo cuatrimestre - 2013  
Práctica 3  
**Conexión y arcoconexión**

---

**Conexión**

1. Sea  $X$  un conjunto y  $\tau, \tau'$  dos topologías sobre  $X$ . Pruebe que si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico conexo y  $\tau' \subset \tau$ , entonces  $(X, \tau')$  es un espacio topológico conexo.
2. Pruebe que:
  - (a) si  $X$  es un espacio conexo y  $A \subsetneq X$  es un subconjunto propio no vacío, entonces  $\partial A \neq \emptyset$ ;
  - (b) recíprocamente, si  $X$  es desconexo entonces existe  $B \subsetneq X$  un subconjunto propio no vacío tal que  $\partial B = \emptyset$ .
3. (a) Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subespacios conexos de  $X$  tales que  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pruebe que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es conexo.  
(b) Sean  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una colección de subespacios conexos de  $X$  y  $A$  un subespacio conexo de  $X$  tales que  $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ . Pruebe que  $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$  es conexo.
4. ¿Cuáles de los siguientes espacios dotados de sus topologías del orden lexicográfico son conexos?
  - (a)  $\mathbb{N} \times [0, 1)$ .
  - (b)  $[0, 1) \times \mathbb{N}$ .
  - (c)  $[0, 1) \times [0, 1]$ .
  - (d)  $[0, 1] \times [0, 1)$ .
5. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$ . Pruebe que si  $A$  es conexo, entonces  $\bar{A}$  también. Más aún, todo subespacio  $B$  de  $X$  tal que  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$  resulta conexo. ¿Qué ocurre con  $\partial A$  y con  $A^\circ$ ?
6. Sea  $X$  un espacio y  $A \subseteq X$  un subconjunto conexo. Si  $B \subseteq X$  es tal que  $A \cap B \neq \emptyset$  y  $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ , entonces  $A \cap \partial B \neq \emptyset$ .
7. Muestre que entre los espacios  $(0, 1)$ ,  $(0, 1]$  y  $[0, 1]$  no hay dos homeomorfos. Concluya que la existencia de funciones subespacio  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  no implica que  $X$  e  $Y$  sean homeomorfos.
8. Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función cociente. Pruebe que si  $Y$  es conexo y además  $p^{-1}(y)$  es conexo para todo  $y \in Y$ , entonces  $X$  es conexo.
9. (a) Sea  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Pruebe que existe un punto  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .  
(b) Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Pruebe que existe un punto fijo de  $f$ .
10. (a) Muestre que si  $A \subset \mathbb{R}^2$  es finito, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  es conexo.  
(b) Muestre que si  $B \subset S^2$  es finito, entonces  $S^2 \setminus B$  es conexo.
11. Pruebe que si  $X$  e  $Y$  son conexos, entonces  $X \times Y$  es conexo.

12. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $X$  es localmente conexo.
- (b) Las componentes de todo subespacio abierto de  $X$  son abiertas en  $X$ .
- (c) Los abiertos conexos de  $X$  forman una base de la topología de  $X$ .

Concluya que si  $X$  localmente conexo, entonces las componentes conexas de  $X$  son abiertas.

13. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función cociente con  $X$  localmente conexo, entonces  $Y$  es localmente conexo.

### Arco-conexión

14. Sea  $T \subset \mathbb{R}^2$  la curva *seno del topólogo*, equipada con la topología de subespacio.

$$T = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leq 1\}$$

Muestre que  $T$  es arco-conexa, y que sin embargo  $\bar{T} \subset \mathbb{R}^2$  no es arco-conexa.

15. Pruebe que si  $A, B \subset X$  son subespacios arco-conexos y  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces  $A \cup B$  es arco-conexo.

16. Pruebe que si  $X$  e  $Y$  son arco-conexos, entonces  $X \times Y$  es arco-conexo.

17. (a) Pruebe que si  $X$  es localmente arco-conexo y  $U \subset X$  es abierto, entonces  $U$  es localmente arco-conexo.

(b) Pruebe que si  $X$  es localmente arco-conexo y conexo, entonces es arco-conexo.

(c) Concluya que si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, entonces

$$U \text{ es conexo} \Leftrightarrow U \text{ es arco-conexo}$$

### Componentes

18. Calcule las componentes conexas de  $\mathbb{R}_l$  y  $\pi_0(\mathbb{R}_l)$ .

19. Pruebe que el cuadrado ordenado  $I \times I$  es localmente conexo pero no es localmente arco-conexo. Calcule las componentes conexas de  $I \times I$  y  $\pi_0(I \times I)$ .

20. Dados  $x, y$  puntos de  $X$ , decimos que  $x \sim y$  si no existe separación  $X = A \cup B$  de  $X$  en dos conjuntos abiertos y disjuntos tales que  $x \in A$  e  $y \in B$ .

(a) Pruebe que  $\sim$  es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman *cuasi-componentes* de  $X$ .

(b) Muestre que cada componente de  $X$  está contenida en una cuasi-componente.

(c) Determine las cuasi-componentes, las componentes conexas y las arco-conexas de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  (donde  $K$  denota el conjunto  $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ , y  $-K$  denota el conjunto  $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ).

i.  $(K \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ .

ii.  $(A \setminus \{(0, 1/2)\})$ .

iii.  $B \cup ([0, 1] \times \{0\})$ .

iv.  $(K \times [0, 1]) \cup (-K \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times -K) \cup ([-1, 0] \times K)$ .