# Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 11

**Homología**

---

1. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

   Pruebe que

   *a*) Si $b$ y $d$ son mono y $a$ es epi, entonces $c$ es mono.

   *b*) Si $b$ y $d$ son epi y $e$ es mono, entonces $c$ es epi.

   *c*) Concluya que si $a, b, d$ y $e$ son iso, entonces $c$ es iso.

2. Pruebe que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \longrightarrow 0$$

   induce una sucesión exacta larga de homología

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \dots$$

3. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcule la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

4. Pruebe que si $i : A \to X$ es un retracto , entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$, y que si $i$ es retracto por deformación, entonces $i_*$ es isomorfismo.

5. Calcule $\tilde{H}_n\big(\bigvee_{i\in I} S^k\big)$.

6. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{x_1, \cdots, x_m\}$

7. Calcule la homología del cociente de $S^2$ que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto.

8. Sea $X$ espacio topológico. Muestre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(SX)$ para todo $n \geqslant 0$, donde $SX$ es la *suspensión* de $X$, que se define como sigue $SX = X \times I/\sim$, $(x,0) \sim (x',0)$, $(x,1) \sim (x',1)$ para todo $x, x' \in X$.

9. Sea $X$ un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ con $U_i$ abiertos tales que toda intersección $\bigcap_{i=1}^{k} U_{i_k}$ es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geqslant n-1$ y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.

10. Sea $X$ espacio topológico, $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ para todo $n$.

11. Sea $A \subseteq X$. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si $A$ interseca todas las componentes arco conexas de $X$.

12. Sea $X$ un espacio contráctil y sea $A$ un subespacio de $X$. Pruebe que $H_n(X, A)$ es isomorfo a $\tilde{H}_{n-1}(A)$.

13. Sea X espacio topológico, $A \subset X$ subespacio. Si $CA$ es el *cono* $(A \times I)/(A \times \{0\})$ de $A$, considere $X \cup CA$ el espacio que se obtiene de identificar la base del cono $A \times \{1\}$ con $A \subseteq X$. Pruebe que $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA)$.

14. Pruebe que $S^n$ no es un retracto de $D^{n+1}$ y que toda función continua $f : D^n \to D^n$ tiene algún punto fijo.