Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 0

Conjuntos bien ordenados

---

1. **Principio general de definición recursiva**

   Sean J un conjunto bien ordenado y C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $h : S \to C$ cuyo dominio S es una sección [1] de J.

   Dada una función $\rho : \mathcal{F} \to C$, existe una única función $h : J \to C$ que es *compatible* con ρ, ie,

   $$h(\alpha) = \rho(h|_{S_\alpha}) \text{ para todo } \alpha \in J.$$

   Para verlo:

   (a) Probar que si S es una sección de J y h_1, $h_2 : S \to C$ son funciones compatibles con ρ, entonces $h_1 = h_2$.

   (b) Probar que si $\beta \in J$ y $h : S_\beta \to C$ es una función compatible con ρ, entonces existe una función $\bar{h} : S_\beta \cup \{\beta\} \to C$ que es compatible con ρ.

   (c) Probar que si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ compatible con ρ, entonces existe una función

   $$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$

   que es compatible con ρ.

   (d) Probar que para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ que es compatible con ρ.

   Sugerencia: Estudie por separado el caso en que β tiene un predecesor inmediato y el caso en que no.

   (e) Probar el principio general de definición recursiva.

2. (a) Sean J y E dos conjuntos bien ordenados y sea $h : J \to E$ una función. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i. h preserva el orden (es decir, $\alpha < \beta \Rightarrow h(\alpha) < h(\beta)$) y su imagen es una sección de E.

   ii. $h(\alpha) = \min\{E \setminus h(S_\alpha)\}$ para todo $\alpha \in J$.

   iii. Para todo $\alpha \in J$ es $h(S_\alpha) = S_{h(\alpha)}$.

   (b) Probar que si E es un conjunto bien ordenado, entonces el tipo de orden de una sección propia de E es distinto del tipo de orden de E, y que dos secciones distintas de E tienen tipos de orden distintos.

   Sugerencia: Dado J, existe a lo sumo una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es una sección de E.

3. Sean J y E dos conjuntos bien ordenados y sea $k : J \to E$ una función que preserva el orden. Probar que entonces el tipo de orden de J es el de una sección de E.

   Sugerencia: Defina inductivamente $h : J \to E$ mediante la recursión $h(\alpha) = \min\{E \setminus h(S_\alpha)\}$, usando la existencia de k para ver la buena definición de h.

---

[1] Decimos que un subconjunto $S \subseteq J$ es una *sección* de J si $\forall \alpha \in S, \forall \beta \in J, \quad \beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \in S$. En particular, si $\beta \in J$, el conjunto $S_\beta = \{\alpha \in J : \alpha < \beta\}$ es una sección de J. Notar que si S es una sección de J y $\beta \in S$, entonces $S_\beta \subseteq S$.

4. (a) Probar que si A y B son dos conjuntos bien ordenados, entonces se satisface exactamente una de las siguientes tres condiciones:
   - A y B tienen el mismo tipo de orden;
   - A tiene el tipo de orden de una sección propia de B;
   - B tiene el tipo de orden de una sección propia de A.

   Sugerencia: Construir un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B y usar el ejercicio anterior.

   (b) Usando el teorema del buen orden probar que dados dos conjuntos, uno tiene cardinal mayor o igual que el otro.

5. Sean X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, \leq)$ con A un subconjunto de X y $<$ un buen orden en A. Definimos una relación $\preceq$ en $\mathcal{A}$ de manera que $(A, \leq) \preceq (A', \leq')$ sii $(A, \leq)$ es una sección de $(A', \leq')$.

   (a) Demostrar que la relación $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{A}$.

   (b) Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada por $\preceq$. Sea

   $$B' = \bigcup_{(B,\leq)\in\mathcal{B}} B$$

   y sea $\leq'$ la unión de las relaciones $\leq$ que aparecen como segunda componente de los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que $(B', \leq')$ es un conjunto bien ordenado.

6. Muestre que el principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.

   Sugerencia: Use el ejercicio 5 para una implicación y el principio general de definición recursiva (ej. 1) para la otra.

7. El objetivo de este ejercicio es demostrar, usando los resultados de los ejercicios 1–5, que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

   Sea X un conjunto, sea $\mathcal{P}'(X)$ el conjunto de las partes no vacías de X y sea $c : \mathcal{P}'(X) \to X$ una función de elección fijada, de manera que para cada $T \in \mathcal{P}'(X)$ es $c(T) \in T$. Si T es un subconjunto de X y $\leq$ es una relación sobre T, decimos que $(T, \leq)$ es una *torre* en X si $\leq$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$ se tiene que

   $$x = c(X \setminus S_x(T, \leq))$$

   con $S_x(T, \leq)$ la sección de $(T, \leq)$ por x.

   (a) Probar que si $(T_1, \leq_1)$ y $(T_2, \leq_2)$ son dos torres en X, entonces uno de estos conjuntos es una sección del otro.

   Sugerencia: Suponiendo que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y que $h(T_1)$ es igual a una sección de T_2, pruebe que $h(x) = x$ para todo $x \in T_1$.

   (b) Probar que si $(T, \leq)$ es una torre en X y $T \neq X$, entonces existe una torre en X de la cual $(T, \leq)$ es una sección propia.

   (c) Sea $\{(T_k, \leq_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres de X y sean

   $$T = \bigcup_{k\in K} T_k \qquad \text{y} \qquad \leq = \bigcup_{k\in K} \leq_k.$$

   Muestre que $(T, \leq)$ es una torre en X y concluya de esto que $T = X$.