

# GEOMETRÍA PROYECTIVA

## PROGRAMA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

Este curso constituye una introducción a la Geometría Diferencial y a la Geometría Algebraica. Estudiaremos subvariedades -principalmente curvas y superficies- de espacios euclídeos, afines y proyectivos.

### 1) Cuádricas.

Formas bilineales. Formas cuadráticas; rango, signatura. Cuádricas; rango, centro, puntos singulares. Clasificación afín y ortogonal. Otros problemas de clasificación, acción de un grupo en un conjunto, invariantes.

### 2) Curvas.

Curvas paramétricas y curvas en forma implícita. Ejemplos. Puntos regulares y singulares. Longitud de arco, curvatura, torsión. Contacto; rectas, planos y esferas osculadores. Familias de curvas; envolventes. Familias de curvas definidas por ecuaciones diferenciales. Ecuaciones de Frenet. Teorema de clasificación ortogonal.

### 3) Subvariedades del espacio afín.

Aplicaciones diferenciables  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U \subset \mathbb{R}^d$  abierto; cartas. Subvariedades diferenciales de  $\mathbb{R}^n$ . Subvariedades algebraicas de  $K^n$ . Definiciones y primeros ejemplos. Espacio tangente, puntos regulares y puntos singulares. Funciones diferenciables, derivada.

### 4) Superficies.

Ejemplos: superficies de revolución, superficies regladas. Primera forma fundamental; distancia en la superficie. Isometrías, deformaciones. Aplicación de Gauss. Segunda forma fundamental. Curvatura media y Gaussiana. Direcciones principales. Puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos. Teorema egregio de Gauss. (Opcional: Ecuaciones de compatibilidad, teorema de clasificación ortogonal de superficies. Geodésicas. Geometrías no-Euclideanas, disco de Poincaré. Teorema de Gauss-Bonnet).

### 5) Curvas algebraicas afines.

Curvas algebraicas en el plano afín  $K^2$ . Puntos singulares, multiplicidad, cono tangente. Anillo de series formales; ramas de una curva algebraica en un punto. Multiplicidad de intersección; varias definiciones y su equivalencia. Asíntotas. Intersecciones de curvas y la resultante.

### 6) Espacios proyectivos y curvas algebraicas proyectivas.

Espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n(K)$ . Coordenadas homogéneas y coordenadas afines. Hipersuperficies de grado  $d$ . Homogeneización y deshomogeneización. Curvas algebraicas en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2(K)$ . Teorema de Bézout. Curvas racionales. Puntos de inflexión y el Hessiano. Clasificación de cuatro puntos en  $\mathbb{P}^1(K)$ , razón doble, invariante  $j$ . Cúbicas. Género. Transformaciones birracionales. Curva dual, fórmulas de Plücker.

Como complemento a las notas de clase, las referencias principales para la materia son el libro [5] de Do Carmo para curvas y superficies diferenciables y el libro [6] de Fulton para curvas algebraicas.

## REFERENCIAS

- [1] Alekseevskij-Vinogradov-Lychagin: Geometry I, Basic ideas and concepts of differential geometry. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Springer.
- [2] Birkhoff-Mac Lane: A survey of modern algebra. Macmillan.
- [3] Bourbaki: Algèbre, Chapitre 9, Formes sesquilineaires et formes quadratiques. Springer.
- [4] Cukierman: Cuádricas y cúbicas.  
<http://mate.dm.uba.ar/~fcukier/Teaching.htm>
- [5] Do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall.
- [6] Fulton: Algebraic curves. Springer.  
<http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/>
- [7] Hilbert-Cohn Vossen: Geometry and the imagination. Chelsea (AMS).
- [8] Lang: Algebra. Springer.
- [9] Rey Pastor-Pi Calleja-Trejo: Análisis matemático, vols. I-III. Ed. Kapelusz.
- [10] Schaum Outlines: Differential geometry.
- [11] Spivak: Calculus on Manifolds (Cálculo en Variedades, Reverte).
- [12] Spivak: A comprehensive introduction to differential geometry, vols. 1-5. Publish or Perish Inc.
- [13] Struik: Lectures on classical differential geometry. Dover.
- [14] Walker: Algebraic curves. Springer.