Preliminares II - Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada partición π del intervalo $[a, b]$ en subintervalos (i.e. particiones de la forma $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$) se definen las *sumas inferior* y *superior* de Riemann por las fórmulas

$$s_\pi(f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{y} \qquad S_\pi(f) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde

$$m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad \text{y} \qquad M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Se definen a continuación las *integrales inferior* y *superior* de Riemann como

$$I_R(f) = \sup\{s_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a, b] \text{ en subintervalos}\}$$

$$S_R(f) = \inf\{S_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a, b] \text{ en subintervalos}\}.$$

Por último, decimos que f es *Riemann integrable* si las integrales inferior y superior de Riemann coinciden. En tal caso se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\, dx := I_R(f) = S_R(f).$$

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición π del intervalo $[a, b]$ por subintervalos tal que $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \varepsilon$

(b) Si f es monótona en $[a, b]$ entonces es Riemann integrable

(c) Si f es continua en $[a, b]$ entonces es Riemann integrable

(d) La función característica del conjunto de los números racionales no es Riemann integrable en ningún intervalo acotado.

Ejercicio 2.

(a) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones acotadas y Riemann integrables en un intervalo $[a, b]$ que convergen uniformemente sobre $[a, b]$ a una cierta función f entonces dicha función es también Riemann integrable en $[a, b]$ y además se verifica que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(b) Mostrar un ejemplo de una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones uniformemente acotadas y Riemann integrables en un intervalo $[a, b]$ que converjan puntualmente a una función que no sea Riemann integrable en dicho intervalo.