

PRÁCTICA 1 - MEDIDA DE LEBESGUE

---

**Ejercicio 1.** Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  probar que existe  $H \supseteq A$  de tipo  $G_\delta$  tal que  $|A|_e = |H|$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  tales que  $d(A, B) > 0$ . Probar que  $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que existe  $A$  de medida nula con  $E \subseteq A$ .

- (a) Probar que  $E$  tiene medida nula.
- (b) Deducir que el cardinal de los medibles es  $2^c$ . ¿Cual es el cardinal de los no medibles?

**Ejercicio 4.** Sea  $E = \{x \in (0, 1) : \text{en el desarrollo decimal de } x \text{ no aparece el dígito } 7\}$ . Probar que  $E$  tiene medida nula.

**Ejercicio 5.**

- (a) Sea  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Riemann integrable. Probar que el gráfico de  $f$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  de medida nula.
- (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar que su gráfico tiene medida nula.
- (c) ¿Y si  $f$  tiene finitas discontinuidades?

**Ejercicio 6.** Sea  $Z \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $|Z| = 0$ . Probar que  $E = \{x^2 : x \in Z\}$  tiene medida nula.

**Ejercicio 7.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible tal que  $E = A \cup B$  con  $|B| = 0$ . Probar que  $A$  es medible.

**Ejercicio 8.** Sean  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por la fórmula  $T(x) = x + v$ . Probar que

- (a)  $|T(E)|_e = |E|_e$  para todo  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- (b) Si  $E$  es medible entonces  $T(E)$  es medible y  $|T(E)| = |E|$ .

**Ejercicio 9.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . Definimos  $rA = \{r \cdot a : a \in A\}$ . Probar que

- (a)  $|rA|_e = r^n |A|_e$ .
- (b) Si  $A$  es medible entonces  $rA$  es medible y  $|rA| = r^n |A|$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Denotemos por  $I'$  a los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas y por  $|E|'_e$  a la medida exterior de un conjunto  $E$  relativa a dicho sistema de coordenadas.

- (a) Probar que  $|E|'_e = |E|_e$  para todo  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- (b) Deducir que la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  es invariante por rotaciones y simetrías.

**Ejercicio 11.** Sea  $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ .

- (a) Calcular  $|B(0, r)|$  en términos de  $|B(0, 1)|$ .
- (b) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  medible. Probar que la función  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la fórmula

$$f(r) = |A \cap B(0, r)|$$

es continua.

- (c) Demostrar que si  $A$  es medible entonces para cada  $s : 0 \leq s \leq |A|$  existe  $B \subseteq A$  medible tal que  $|B| = s$ .
- (d) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  medible tal que  $0 < |A| < +\infty$ . Probar que dado  $n \in \mathbb{N}$  existen  $n$  subconjuntos disjuntos de  $A$ ,  $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ , tales que  $|A_j| = |A|/n$ , para cada  $1 \leq j \leq n$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Probar que si  $E \subseteq [0, 1)$  es medible entonces  $T^{-1}(E)$  es medible y  $|T^{-1}(E)| = |E|$ .

**Ejercicio 13.** Para cada sucesión de conjuntos medibles  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definimos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

- (a)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  son medibles.
- (b)  $|\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ .
- (c) Si para algún  $n \in \mathbb{N}$  vale que  $|\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k| < +\infty$  entonces  $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ .
- (d) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ , entonces  $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| = 0$ .

**Ejercicio 14.** Construir un subconjunto  $C_\delta$  de  $[0, 1]$  siguiendo la construcción del conjunto de Cantor excepto que en el  $k$ -ésimo paso cada intervalo que se extrae tiene longitud  $\delta 3^{-k}$  para cierto  $0 < \delta < 1$ .

- (a) Probar que  $C_\delta$  es perfecto, tiene medida  $1 - \delta$  y no contiene intervalos.
- (b) Construir un abierto de  $\mathbb{R}$  con frontera de medida positiva.

**Ejercicio 15.** Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- (a)  $E$  es medible.
- (b) Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $F \subseteq E$  cerrado tal que  $|E \setminus F|_e < \varepsilon$ .
- (c) Existen  $H$  de clase  $F_\sigma$  y  $N$  de medida 0 tales que  $E = H \cup N$ .

**Ejercicio 16.** Decimos que el conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  satisface la *condición de Carathéodory* si para todo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se verifica

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

- (a) Todo conjunto medible satisface la condición de Carathéodory.
- (b) Si  $E$  es acotado y satisface la condición de Carathéodory entonces  $E$  es medible.
- (c)  $E$  es medible si y sólo si satisface la condición de Carathéodory.

**Ejercicio 17.**

- (a) Probar que si  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

- (b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $|E_k|_e < +\infty$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e < \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

**Ejercicio 18.** Para cada  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  definimos su medida interior por la fórmula

$$|E|_i = \sup\{|F| : F \subseteq E, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

- (a)  $|E|_i \leq |E|_e$ .
- (b) Si  $E$  es medible entonces  $|E|_i = |E|_e$ .
- (c) Si  $|E|_e < +\infty$  y  $|E|_i = |E|_e$  entonces  $E$  es medible.
- (d) Existe  $E$  no medible tal que  $|E|_i = |E|_e$ .
- (e)  $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$ .

- (f) Si  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  son disjuntos entonces  $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $V$  un conjunto de Vitali. Probar que si  $E \subseteq V$  es medible entonces  $|E| = 0$ . Concluir que  $|V|_i = 0$ .

**Ejercicio 20.**

- (a) Construir una sucesión de conjuntos  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  disjuntos tales que  $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$ .
- (b) Construir una sucesión de conjuntos  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_i > \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$ .
- (c) Construir  $E \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $|E|_i < +\infty$  y  $|E|_e = \infty$ .

**Ejercicio 21.** Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y  $A \subseteq E$ . Probar que

$$|E| = |A|_i + |E \setminus A|_e.$$

**Ejercicio 22.** Mostrar que existe  $H \subseteq [0, 1]$  de clase  $F_\sigma$  con  $|H| = 1$  formado únicamente por puntos irracionales.

**Ejercicio 23.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto medible con medida positiva.

- (a) Mostrar que para todo  $\alpha > 1$  existe un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $|I| < \alpha |E \cap I|$ .
- (b) Probar que existe  $r_0 > 0$  tal que  $E \cap (E + v) \neq \emptyset$  para todo  $v \in B(0, r_0)$ .
- (c) Concluir que el conjunto de las diferencias de  $E$  definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

**Ejercicio 24.** Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal  $c$ .  
*Sugerencia.* Recordar que si  $\alpha$  es un cardinal infinito entonces  $\alpha^2 = \alpha$ .

**Ejercicio 25.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  medible que satisface la propiedad

$$x, y \in E \implies \frac{x + y}{2} \notin E.$$

Probar que  $E$  tiene medida nula.

*Sugerencia.* Mostrar que existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que para todo intervalo  $I$  se tiene  $|E \cap I| \leq \alpha |I|$ .