Análisis Complejo

Práctica N°5.

1. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

2. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

3. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica no suryectiva.
   (a) Probar que u está acotada superior o inferiormente.
   (b) Probar que u es constante (por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva).

4. Sea f entera tal que existen dos números complejos, z_0 y z_1, $\mathbb{R}$-linealmente independientes, tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

5. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\overline{\Omega}$ a los puntos $P_1, \dots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

6. Sea f entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

7. Formular y demostrar el "principio de módulo mínimo" para funciones holomorfas.

8. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f(z)| = $ cte para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

9. (a) Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.
   (b) Con las hipótesis del ítem anterior, verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω, f tiene sólo un número finito de ceros.

10. (a) ¿Existe f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
    (b) ¿Existe f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3-2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$?

11. Hallar todas las funciones enteras tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 f\Big(\frac{1}{n}\Big)^3 + f\Big(\frac{1}{n}\Big) = 0.$$

12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ vale que $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

13. Sea $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $B(0,1)$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $B(0,1)$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

14. Sean Ω un abierto conexo del plano complejo y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω. Si existe una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de puntos de Ω tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además
$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
probar que existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

15. Demostrar que si Ω es un abierto conexo del plano complejo, f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

16. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos a y b tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0,1)$. (Sugerencia: considerar la función
$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)$$
y usar el Lema de Schwarz.)

17. Sean $f, g : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B(0,1)$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en $B(0,1)$.

18. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(1,4)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.

19. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo z en $B(0,1)$.

20. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(0,2)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.