

### Práctica 3: Diferenciación

---

#### Aplicación de algunos resultados de diferenciación en una variable

1. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:
  - (a)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  en el intervalo  $[1, 2]$ .
  - (b)  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  en el intervalo  $[1, 3]$ .
  - (c)  $f(x) = \sin^2 x$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .
2. Probar que la función  $f(x) = \sqrt[3]{(x - 3)^2}$  satisface  $f(1) = f(5)$  pero no existe  $c \in (1, 5)$  tal que  $f'(c) = 0$  ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle?
3.
  - (a) Sea  $f$  un polinomio con al menos  $k$  raíces distintas, probar que  $f'$  tiene al menos  $k - 1$  raíces distintas.
  - (b) Probar que la ecuación  $3x^5 + 15x - 8 = 0$  tiene sólo una raíz real.
  - (c) Sea  $a \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = e^{a^2x} + x^3 + x$  si  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene exactamente una solución en el intervalo  $[-1, 0]$ .
4. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Demostrar las siguientes afirmaciones:
  - (a) Si  $f' = g'$  en  $(a, b)$ , entonces  $f(x) = g(x) + c$  donde  $c$  es una constante.
  - (b) Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es estrictamente creciente.
  - (c) Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es estrictamente decreciente.
5. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las siguientes acotaciones
  - (a)  $|\sen x - \sen y| \leq |x - y|$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - (b)  $|1/x - 1/y| \leq |x - y|$ , para  $x, y > 1$ .
  - (c)  $|\arctan a - \arctan b| \leq \frac{1}{2} |a - b|$ , para  $a, b \geq 1$ .
6. Encontrar explícitamente el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el teorema de Cauchy en el caso de las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^3$  en el segmento  $[1, 2]$ .
7. Utilizando el teorema de Cauchy, calcular:
  - (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  donde  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x^2 - y^2} & \text{si } x \neq y, \\ -1/2 & \text{si } x = y. \end{cases}$

$$(b) \sup_{x,y \in [0,2]} f(x,y) \text{ donde } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4 - 4(x^3 - y^3) + 4(x^2 - y^2)}{y^2 - x^2} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

¿Cuanto vale  $\sup_{x,y \in [1,2]} f(x,y)$ ?

### Derivadas parciales y direccionales

8. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $x = a$ . Probar que  $f$  es derivable en  $x = a$  si y solo si existe una única función afín  $L(x) = m(x - a) + b$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

Calcular el valor de  $m$  y de  $b$ . Al gráfico de  $L(x)$  se la denomina la **recta tangente** a  $f(x)$  en  $x = a$ .

9. Para cada una de las siguientes funciones  $f(x,y)$ , calcular la derivada direccional en la dirección de  $v$  en el punto  $(x_0, y_0)$

(a)  $f(x,y) = x^2 + y^2$ ,  $v = (1, 0)$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  y  $v = (0, 1)$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ .

(b)  $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$ ,  $v = (1, 1)$ ,  $(x_0, y_0) = (2, 3)$  y  $v = (1, 2)$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$

(c)  $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$ ,  $v = (0, 1, 0)$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$ .

(d)  $f(x,y) = (x+1)\text{sen } y - 2$ ,  $v = (1, 0)$ ,  $(x_0, y_0)$  cualquiera.

(e)  $f(x,y) = \|(x,y)\|$ ,  $v = (a,b)$ ,  $(x_0, y_0) = (0,0)$  con  $\|(a,b)\| \neq 0$ .

10. (a) Sea  $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$  y  $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Calcular  $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$  y  $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$ .

(b) Calcular  $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$  para  $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

(c) Sea  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Calcular  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$  para todo vector unitario  $v$ .

11. Calcular las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones

(a)  $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$ ;

(e)  $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$ ;

(b)  $f(x,y,z) = ye^x + z$ ;

(f)  $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$ ;

(c)  $f(x,y) = x^2 \text{sen}^2(y)$ ;

(d)  $f(x,y) = \text{sen } x$ ;

(g)  $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ .

12. Probar que la función  $f(x,y) = |x| + |y|$  es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

13. Consideremos la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que las únicas direcciones  $v \in \mathbb{R}^2$  para las que existe la derivada direccional  $f_v$  en el origen son  $v = (1, 0)$  y  $v = (0, 1)$ . Probar, además, que la función no es continua en el origen.

14. Consideremos la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que  $f$  admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario  $v \in \mathbb{R}^2$ . Sin embargo,  $f$  tampoco es continua en el origen.

15. Sea  $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ .

(a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que  $\pm e_1, \pm e_2$  son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Mostrar que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

### Diferenciabilidad

16. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left( 4 \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{y} \right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$$17. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Probar que en el origen  $f$  es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero  $f$  no es diferenciable.

$$18. \text{ Sea } f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

- (a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en  $t_0 = 0$ :

$$\sigma_1(t) = (t + 1, 3, f(t + 1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t + 1, t + 3, f(t + 1, t + 3)).$$

- (b) Encontrar la ecuación de un plano  $z = T(x, y)$  que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{\|(x, y) - (1, 3)\|} = 0.$$

19. Sea  $f$  diferenciable en  $(1, 2)$  tal que  $f(1, 2) = 3$ , y sean además los vectores  $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ . Se sabe que  $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1, 2) = 3$  y que  $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1, 2) = 4$ .

(a) Calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ .

- (b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de  $f$  en  $(1, 2, f(1, 2))$ .

20. Estudiar la existencia de plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir su ecuación.

(a)  $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$  en  $(1, 5)$  y en  $(2, 2)$ .

(b)  $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$  en  $(0, 0)$  y en  $(16, 1)$ .

(c)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  en  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 \neq 0$ .

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  en  $(0, 0)$  y en  $(1, 0)$ .

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  en  $(0, 0)$  y en  $(-1, 1)$ .

(f)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3+x^2(y^2-6y+7)+(y-1)^2(6x+12-8y)}{x^2+2(y-1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$  en  $(0, 1)$ .

21. Usando la expresión del plano tangente para una función  $f$  adecuada, aproximar  $(0, 99e^{0,02})^8$ .

22. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar la respuesta.

- (a) Una función afín  $f(x, y) = ax + by + c$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , es diferenciable en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) El plano tangente de la función  $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$  en el punto  $(1, 1)$  contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -1)$$

- (c) Si la función  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en el punto  $(2, -1)$  con plano tangente

$$z = 2x - 3y + 2$$

entonces la función  $g(x, y) = 3x - 2f(x, y) + 5$  es diferenciable en el punto  $(2, -1)$  con plano tangente

$$z = -x + 6y + 1$$

- (d) El plano tangente de la función  $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$  en el punto  $(1, 2)$  contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, -1, 4)$$

- (e) Si la función  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $(0, 1)$  y el plano tangente en el punto  $(0, 1)$  de la función  $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $z = 0$  entonces la función  $h(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(x, y) = f(x, y) g(x, y)$$

es diferenciable en el punto  $(0, 1)$ .

- (f) Si la función  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $(0, 0)$  entonces la función

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)f(x, y)$$

es diferenciable en el punto  $(0, 0)$  y su plano tangente es  $z = 0$ .

### Interpretación geométrica del vector gradiente

23. Encontrar la dirección en que la función  $z = x^2 + xy$  crece más rápidamente en el punto  $(1, 1)$ . ¿Cuál es la magnitud  $\|\nabla z\|$  en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.
24. Supongamos que la función  $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$  representa la altura de una montaña en la posición  $(x, y)$ . Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano  $xy$  son iguales a  $(1, 0)$ . ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?
25. (a) Mostrar que si  $\nabla f(x_0) \neq 0$  entonces  $-\nabla f(x_0)$  apunta en la dirección a lo largo de la cual  $f$  decrece más rápidamente.

- (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

$$f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 4 \cos(3y)$$

En el punto  $(\pi/3, \pi/3)$  encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

26. Dada la función  $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^4$ , verificar cada una de las siguientes afirmaciones:
- (a)  $f$  crece en la dirección  $(0, 1)$  desde el punto  $(1, 1)$ .
  - (b) Desde el punto  $(1, 1)$  el mayor crecimiento de  $f$  se da en la dirección  $(2, 2)$ .
  - (c) Desde el punto  $(1, 1)$ ,  $f$  decrece si nos movemos en la dirección  $(-1, 0)$ .
  - (d) Desde el punto  $(1, 1)$  crece en la dirección  $(0, 1)$

### Generalización a varias variables

27. Calcular el gradiente de  $f$  para

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$ ,

(b)  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ ,

(c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ .

28. Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por  $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$

- (a) Verificar que  $T$  es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ).
- (b) Calcular la matriz de la diferencial  $DT(a)$  para  $a \in \mathbb{R}^2$ . Verificar que es la misma matriz que la hallada en (a).

29. Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una transformación lineal.

- (a) Supongamos que  $T$  verifica

$$\lim_{v \rightarrow \vec{0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = 0,$$

donde  $\vec{0}$  denota el vector nulo. Probar entonces que  $T$  es la transformación lineal nula, es decir, para cada  $w \in \mathbb{R}^n$  tenemos que  $T(w) = \vec{0}$ .

- (b) Asumiendo que  $T$  es diferenciable, deducir que para cada  $a \in \mathbb{R}^n$  la diferencial  $DT(a)$  es igual a  $T$ .

30. Para cada una de las siguientes funciones, calcular  $DF(a)$  para  $a$  en el dominio de  $F$ .

(a)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (x, y)$

- (b)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$   
 (c)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$   
 (d)  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \|x\|^2$

### Regla de la Cadena

31. Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable con derivada positiva en todo punto y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

- (a) Probar que  $f$  es biyectiva  
 (b) Usando el hecho que  $f^{-1}$  es derivable (no hace falta probarlo) concluir que, si  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Mostrar que la derivada de  $g(x) = \operatorname{atan}(x)$  es  $\frac{1}{1+x^2}$ .

32. Sean  $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$  y  $g(x, y) = x \operatorname{sen}(y)$ . Además, tenemos la siguiente dependencia respecto de  $t$ ,

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \operatorname{sen} t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \operatorname{sen} t, y(t) = t,$$

donde  $t$  es una nueva variable. Bajo estas condiciones, calcular las derivadas respecto de  $t$  de las funciones

$$f(u(t), v(t), w(t)) \text{ y } g(x(t), y(t)),$$

en dos formas diferentes:

- (a) usando la regla de la cadena.  
 (b) sustituyendo.

33. Sean  $f(u, v) = e^{uv} \operatorname{sen}(u^2 + v^2)$ ,  $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$ . Dadas

$$u(x, y) = x + y, \quad v(x, y) = xy, \quad w(x, y) = x - y + 1$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f(u(x, y), v(x, y)) \text{ y } g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

- (a) usando la regla de la cadena.  
 (b) sustituyendo.

34. Sean  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables y  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a)  $F(x, y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y))$       (b)  $F(x, y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$   
 (c)  $F(x, y) = G(x, G(x, y))$       (d)  $F(x, y) = f(x)^{g(y)}$  (si  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ )

35. (a) ¿Para qué valores de  $p \in \mathbb{R}_{>0}$  es

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^p \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ ? ¿Para qué valores de  $p$  es  $f$  de clase  $C^1$ ?

(b) La función  $f$  se puede escribir como  $g(x^2 + y^2)$  con  $g(t) = t^p \operatorname{sen} \left( \frac{1}{t} \right)$  si  $t > 0$  y  $g(0) = 0$ . ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de  $g$ ?

36. Sea  $f(x, y)$  diferenciable en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Se dice que  $f$  es homogénea de grado 1 si  $\forall t > 0$  y  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$  se verifica  $f(t(x, y)) = tf(x, y)$ . Probar que  $f$  es homogénea de grado 1 si y solo si

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

37. (a) Sea  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^2$ .

- i. Probar que si  $f$  es constante en  $B$ , entonces  $\nabla f(a, b) = 0$ , cualquiera sea  $(a, b) \in B$ .
- ii. Probar que si  $\nabla f(a, b) = 0$  para cada  $(a, b) \in B$ , entonces  $f$  es constante en  $B$ . (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)

(b) Si  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables, y verifican que  $\nabla f(a, b) = \nabla g(a, b)$  para todo  $(a, b) \in B$ , probar que entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$